अध्याय 1: समुच्चय

स्मरणीय बिंदु:

- समुच्चय और उनका निरूपण

  N: प्राकृत संख्याओं का समुच्चय

  Z: पूर्णांकों का समुच्चय

  Q: परिमेय संख्याओं का समुच्चय

  T: अपरिमेय संख्याओं का समुच्चय

  R: वास्तविक संख्याओं का समुच्चय

  Z^+: धनात्मक पूर्णांकों का समुच्चय

  Q^+: धनात्मक परिमेय संख्याओं का समुच्चय और

  R^+: धनात्मक वास्तविक संख्याओं का समुच्चय
- वस्तुओं के सुपरिभाषित संग्रह को समुच्चय कहते हैं |
- समुच्चयों को प्राय: अँग्रेजी के बड़े अक्षरों A, B, C, X, Y, Z इत्यादि से निरूपित करते हैं |
- समुच्चयों के अवयवों को निरूपित करने के लिए अँग्रेजी वर्णमाला के छोटे अक्षरों a, b, c, x, y, z इत्यादि का उपयोग करते हैं |
- यदि a, समुच्चय ‘A’ का एक अवयव है तो हम $a \in A$ कहते हैं और यदि नहीं है तो हम $a \notin A$. कहते हैं।
- समुच्चय को निरूपित करने की दो विधियाँ हैं:

  (i) रोस्टर या सारणीबद्ध रूप

  (ii) समुच्चय निर्माण विधि
- रोस्टर रूप में सभी अवयवों को अल्पविराम से अलग करके सूचीबद्ध किया गया है और उन्हें कोष्ठक { } में रखा गया है। उदाहरण के लिए अंग्रेजी वर्णमाला में स्वर V के सेट को इस प्रकार वर्णित किया गया है : $V = \{a, e, i, o, u\}$
- रिक्त समुच्चय: एक समुच्चय जिसमें कोई भी अवयव नहीं होता, एक रिक्त समुच्चय कहलाता है | रिक्त समुच्चय को ϕ या { } से निरुपित करते हैं |
- वह समुच्चय जो रिक्त हो या जिसमें निश्चित संख्या में अवयव हों, परिमित समुच्चय कहलाता है अन्यथा समुच्चय को अनंत समुच्चय कहते हैं।

  उदाहरण के लिए:

  मान लीजिए M एक वर्ष के महीनों का समुच्चय है। तब समुच्चय M एक परिमित समुच्चय है।

  मान लीजिए P एक रेखा के सभी बिंदुओं का समुच्चय है। तब समुच्चय P एक अपरिमित समुच्चय है।
- दो समुच्चय A और B को समान कहा जाता है, यदि उनके अवयव समान हैं और हम A = B लिखते हैं। अन्यथा, समुच्चय को असमान समुच्चय कहा जाएगा और हम $A \neq B$ लिखते हैं।

  उदाहरण के लिए:

  माना $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ और $B = \{5, 4, 3, 2, 1\}$, तब $A = B$.
- समुच्चय A को समुच्चय B का उपसमुच्चय कहा जाता है यदि A का प्रत्येक अवयव B का भी अवयव है।

  दूसरे शब्दों में, $A \subset B$ यदि जब $a \in A$, तब $a \in B$ भी |

  उदाहरण: प्राकृत संख्याओं का समुच्चय N वास्तविक संख्याओं के समुच्चय R का एक उपसमुच्चय है, अर्थात $N \subset R$ ।

- यदि A, B का उपसमुच्चय नहीं है, तो हम लिखते हैं, $A \not\subset B$.
- प्रत्येक समुच्चय स्वयं का एक उपसमुच्चय है। यदि A एक समुच्चय है तो $A \subset A$.
- $N = \{1, 2, 3, 4, 5, ...\}$

  $Z = \{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$

  $Q = \left\{x : x = \frac{p}{q},\ p, q \in Z \ and\ q \neq 0\right\}$

  $T = \{x : x \in R \ and\ x \notin Q\}$
- **R के उप-समुच्चय के रूप में अन्तराल**

  $a, b \in R$ और $a < b$ तब,

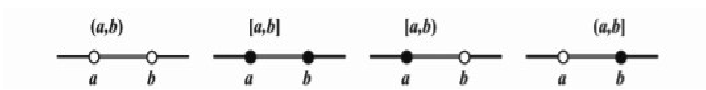
  (i) $(a, b) =]a, b[= \{x : a < x < b\}$

  (ii) $[a, b] = \{x : a \le x \le b\}$

  (iii) $[a, b) = \{x : a \le x < b\}$

  (iv) $(a, b] = \{x : a < x \le b\}$

  वास्तविक रेखा पर R के उप-समुच्चयों के रूप में वर्णित उपर्युक्त अंतरालों को इस प्रकार दर्शाते हैं :

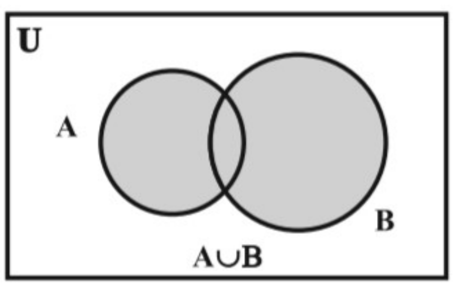


  $(b - a)$ को अन्तराल की लम्बाई कहते हैं |
- समुच्चयों A और B का सम्मिलन वह समुच्चय है जिसमें A के सभी अवयवों के साथ B के भी सभी अवयव हों, तथा उभयनिष्ठ अवयवों को केवल एक बार लिया गया हो |

  $A \cup B = \{x : x \in A \ or\ x \in B\}$

  उदाहरण के लिए $A = \{1, 2, 3\}$ और $B = \{1, 3, 5, 7\}$, तब $A \cup B = \{1, 2, 3, 5, 7\}$.

  दो समुच्चयों के सम्मिलन को आकृति में दिखाए गए वेन आरेख से प्रदर्शित किया जा सकता है :

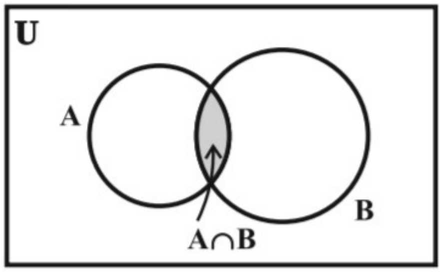


- $x \notin A \cup B \Leftrightarrow x \notin A \ and\ x \notin B.$
- समुच्चयों A और B का सर्वनिष्ठ उन सभी अवयवों का समुच्चय है, जो A और B दोनों में उभयनिष्ठ हैं तथा उभयनिष्ठ अवयवों को केवल एक बार लिया गया हो |

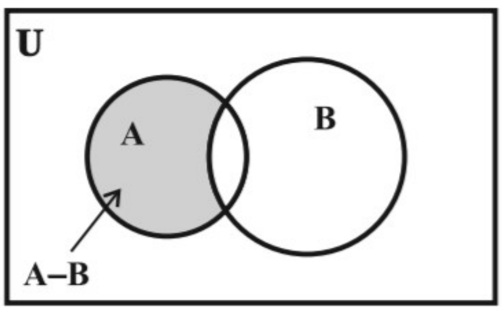
  $A \cap B = \{x : x \in A$ और $x \in B\}$

  उदाहरण के लिए $A = \{1, 2, 3\}$ और $B = \{1, 3, 5, 7\}$ तब $A \cap B = \{1, 3\}$.

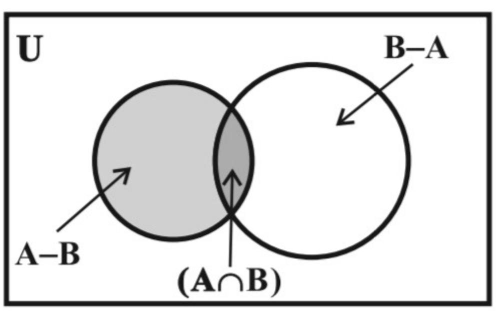
  दो समुच्चयों के सर्वनिष्ठ को आकृति में दिखाए गए वेन आरेख से प्रदर्शित किया जा सकता है :



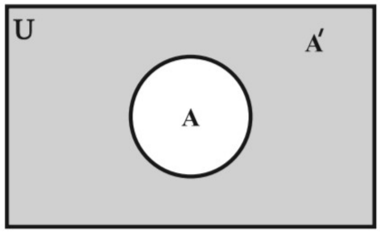
- यदि A और B तो समुच्चय इस प्रकार हैं कि $A \cap B = \phi$, तब A और B असंयुक्त समुच्चय कहलाते हैं |
  उदाहरण के लिए: $A = \{1, 2, 3\}$ और $B = \{4, 5, 6, 7\}$ असंयुक्त समुच्चय हैं |
- $x \notin A \cap B \Leftrightarrow x \notin A \text{ or } x \notin B.$
- समुच्चयों A और B का अंतर उन अवयवों का समुच्चय है जो A में हैं किन्तु B में नहीं हैं, जब कि A और B को इसी क्रम में लिया जाए |
  $A - B = \{x : x \in A \text{ and } x \notin B\}$
  उदाहरण के लिए $A = \{1, 2, 3\}$ और $B = \{1, 3, 5, 7\}$ तब $A - B = \{2\}$.
  दो समुच्चयों के अंतर को आकृति में दिखाए गए वेन आरेख से प्रदर्शित किया जा सकता है :



- समुच्चय $A - B$, $A \cap B$ और $B - A$ परस्पर असंयुक्त समुच्चय होते हैं, अर्थात् इनमें से किन्हीं दो समुच्चयों का सर्वनिष्ठ एक रिक्त समुच्चय होता है |



- मान लीजिए कि U सार्वत्रिक समुच्चय है और A , U का एक उपसमुच्चय है, A का पूरक समुच्चय U के उन अवयवों का समुच्चय है, जो A के अवयव नहीं हैं | A के पूरक समुच्चय को A' से निरुपित करते हैं |
  अतः $A' = U - A = \{x : x \in U \text{ and } x \notin A\}$.
  उदाहरण के लिए : यदि $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ और $A = \{1, 3, 5, 7\}$ तब $A' = \{2, 4, 6, 8, 9\}$
  दो समुच्चयों के अंतर को आकृति में दिखाए गए वेन आरेख से प्रदर्शित किया जा सकता है :



- $(A')' = A$
- **समुच्चयों का बीजगणित के नियम**

1. वर्गसम नियम $(i)\ A \cup A = A$ $(ii)\ A \cap A = A$
2. तत्समक नियम $(i)\ A \cup \phi = A$ $(ii)\ A \cap U = A$ $(iii)\ A \cap \phi = \phi$ $(iv)\ A \cup U = U$
3. क्रम-विनिमेय नियम $(i)\ A \cup B = B \cup A$ $(ii)\ A \cap B = B \cap A$
4. साहचर्य नियम $(i)\ (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ $(ii)\ A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
5. वितरण नियम

$(i)\ A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ $(ii)\ A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

$(i)\ A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ $(ii)\ A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

6. पूरक नियम $(i)\ A \cup A^C = U$ $(ii)\ A \cap A^C = \phi$ $(iii)\ \phi^C = U$ $(iv) U^C = \phi$
7. डी-मार्गन नियम $(i)\ (A \cup B)' = A' \cap B'$ $(ii) (A \cap B)' = A' \cup B'$.
8. डी-मार्गन नियम के अन्य रूप $(i)\ A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$

$(ii)\ A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$

- $A - B = A \cap B'$
- यदि A, B और C परिमित समुच्चय हैं तब

$(i)\ n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

$(ii)\ n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(B \cap C) - n(A \cap C) + n(A \cap B \cap C)$

Q1. सही विकल्प चुनिये:

1. किसी कक्षा में बुद्धिमान छात्रों का समुच्चय है:

(a) रिक्त समुच्चय (b) एकक समुच्चय

(c) परिमित समुच्चय (d) सुपरिभाषित संग्रह नहीं है

2. किसी अरिक्त समुच्चय A के लिए $(A')'$ बराबर है:

(a) A' (b) A (c) ϕ (d) U

3. यदि $A = \{1, 2, 3, 4\}$ और $B = \{3, 4, 5, 6\}$ तो $A \cap B$ का मान है:

(a) $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ (b) $\{3, 4, 5, 6\}$ (c) $\{1, 2, 3, 4\}$ (d) $\{3, 4\}$

4. समुच्चय $\{\ \}$ के उपसमुच्चयों की संख्या होगी:

(a) 1 (b) 2 (c) 3 (d) 0

5. समुच्चय $\{1\}$ के उपसमुच्चयों की संख्या होगी:

(a) 1 (b) 2 (c) 3 (d) 4

6. समुच्चय $B \subset A$ तो $A \cap B$ बराबर होगा:

(a) ϕ (b) A (c) B (d) U

7. समुच्चय $B \subset A$ तो $A \cup B$ बराबर होगा:

(a) ϕ (b) A (c) B (d) U

8. मान लीजिए कि $A=\{1,2,3\}$ तब इसके उपसमुच्चयों की संख्या होगी :

(a) 3 (b) 8 (c) 9 (d) 16

9. समीकरण $x^2+x-2=0$ का हल समुच्चय रोस्टर रूप (सारणीबद्ध रूप) में होगा:

(a) $\{1,-2\}$ (b) $\{-1,-2\}$ (c) $\{1,2\}$ (d) $\{-1,2\}$

Q2. रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए:

1. यदि $X=\{1,3,5\}$ तथा $Y=\{1,2,3\}$ तब $X\cap Y=$..........
2. एक समुच्चय जिसमें एक भी अवयव नहीं होता है, ... कहलाता है |
3. $A\cup A'=$..........
4. $\phi'\cap A=$..........
5. $A\cap A'=$..........
6. $U'\cap A=$..........
7. $A\cup\phi=$..........
8. $A\cap\phi=$..........
9. वह समुच्चय जिसमें अवयवों की संख्या निश्चित होती है, ...समुच्चय कहलाता है |
10. यदि $A\times B=B\times A$ हो तब समुच्चय A और B .... समुच्चय होंगें |

Q3. सही जोड़ी बनाइए :

स्तम्भ –A	स्तम्भ –B
(i) $(A')'$	(a) $U-A$
(ii) $(A\cap B)'$	(b) A
(iii) $A'\cap B'$	(c) $A'\cup B'$
(iv) $A\cap\phi$	(d) $(A\cup B)'$
(v) A'	(e) ϕ

Q4. एक शब्द या वाक्य में उत्तर लिखिए:

1. यदि समुच्चय A में n अवयव हों तो समुच्चय A के कितने उपसमुच्चय होंगे |
2. यदि $A=\{2\ ,4,\ 6,\ 8\}$ और $B=\{6\ ,8,10\ ,12\}$ तो $A\cup B$ ज्ञात कीजिए |
3. यदि $U=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ और $A=\{1\ ,3,7\ ,9\}$ तो A का पूरक समुच्चय $(A)'$ लिखिए |
4. समीकरण $x^2+x-2=0$ का हल समुच्चय रोस्टर रूप में लिखिए |
5. यदि $A=\{b\ ,h,\ o,\ p\ ,\ a\ ,\ l\}$ और $B=\{g\ ,w,a\ ,l,\ i,\ o\ ,r\}$ तो $A\cap B$ ज्ञात कीजिए |
6. यदि $n(A\cup B)=18,\ n(A)=8,\ \ n(B)=15$ तब $n(A\cap B)$ का मान लिखिए |
7. यदि $A=\{b\ ,h,\ o,\ p\ ,\ a\ ,\ l\}$ और $B=\{g\ ,w,a\ ,l,\ i,\ o\ ,r\}$ तो $A-B$ ज्ञात कीजिए |
8. यदि A और B दो असंयुक्त समुच्चय हैं तो $A\cap B$ में कितने अवयव होंगे |
9. यदि $U=\{a,b,c,d,e,f,g,h\}$ और $A=\{a\ ,d\ ,f\ \ ,h\}$ तो $(A')'$ लिखिए |

Q5. सत्य / असत्य लिखिए :

1. यदि $A=\{a\ ,b\}$ तथा $B=\{a\ ,b,c\}$ तो $A\subset B$.
2. $\{\phi\}$ एक रिक्त समुच्चय है |
3. परिमित समुच्चय में अवयवों की संख्या निश्चित होती है |

4. अपरिमित समुच्चय में अवयवों की संख्या निश्चित होती है |

5. $\phi \subset A$, सत्य है, जहाँ ϕ एक रिक्त समुच्चय एवं A कोई भी परिमित समुच्चय है |

Q6. समुच्चय $A = \{2, 4, 6, 8, 10, ...\}$ को समुच्चय निर्माण रूप में लिखिए |

Q7. समान समुच्चय को उदाहरण सहित समझाइए |

Q8. अन्तराल $[6,12]$ को समुच्चय निर्माण रूप में लिखिए |

Q9. समुच्चय $U = \{1, 2, 3, ..., 10\}$ एक सार्वत्रिक समुच्चय है, जिसके $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ और $B = \{4, 6\}$ उपसमुच्चय हैं | इन्हें वेन आरेख द्वारा प्रदर्शित कीजिए |

Q10. यदि $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ और $B = \{4, 6, 10\}$ तो $A \cap B$ और $A \cup B$ ज्ञात कीजिए |

Q11. असंयुक्त समुच्चय किसे कहते हैं | उदाहरण सहित लिखिए |

Q12. यदि $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ तथा $B = \{2, 4, 6, 8\}$ तो $A - B$ तथा $B - A$ के मान ज्ञात कीजिए |

Q13. समुच्चय $\{1, 2, 3\}$ के सभी उपसमुच्चय लिखिए |

Q14. $(A \cup B)'$ का वेन आरेख खींचिए |

Q15. $A' \cap B'$ का वेन आरेख खींचिए |

Q16. $(A \cap B)'$ का वेन आरेख खींचिए |

Q17. $A' \cup B'$ का वेन आरेख खींचिए |

Q18. यदि X और Y दो ऐसे समुच्चय हैं कि $X \cup Y$ में 50 अवयव हैं, X में 28 अवयव हैं और Y में 32 अवयव हैं, तो $X \cap Y$ में कितने अवयव हैं?

Q19. यदि X और Y दो ऐसे समुच्चय हैं कि $n(X) = 17$, $n(Y) = 23$ तथा $n(X \cup Y) = 38$, हो तो $n(X \cap Y)$ ज्ञात कीजिए |

Q20. यदि A और B दो समुच्चय हों $A - B$ और $B - A$ को वेन आरेख द्वारा प्रदर्शित कीजिए |

Q21. समुच्चयों के गुणधर्मों का उपयोग करके सिद्ध कीजिए कि $A \cup (A \cap B) = A$.

Q22. यदि $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $A = \{2, 3\}$, $B = \{4, 5\}$ तो $(A \cup B)'$ तथा $A - B$ के मान ज्ञात कीजिए |

Q23. यदि $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, $A = \{2, 4, 6, 8\}$ और $B = \{2, 3, 5, 7\}$ तो सत्यापित कीजिए कि $(A \cup B)' = A' \cap B'$ |

Q24. यदि $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, $A = \{2, 4, 6, 8\}$ और $B = \{2, 3, 5, 7\}$ तो सत्यापित कीजिए कि $(A \cap B)' = A' \cup B'$ |

Q25. एक विद्यालय में 20 अध्यापक हैं जो गणित या भौतिकी पढ़ाते हैं | इनमें से 12 गणित पढ़ाते हैं और 4 भौतिकी और गणित दोनों पढ़ाते हैं | कितने अध्यापक भौतिकी पढ़ाते हैं?

Q26. 35 विद्यार्थियों की एक कक्षा में, 24 क्रिकेट खेलना पसंद करते हैं और 16 फुटबाल खेलना पसंद करते हैं | इसके अतिरिक्त प्रत्येक विद्यार्थी कम से कम एक खेल अवश्य खेलना पसंद करता है| कितने विद्यार्थी क्रिकेट और फुटबाल दोनों खेलना पसंद करते हैं?

Q27. 400 व्यक्तियों के समूह में, 250 हिन्दी तथा 200 अंग्रेजी बोल सकते हैं | कितने व्यक्ति हिन्दी तथा अंग्रेजी दोनों बोल सकते हैं |

Q28. 70 व्यक्तियों के समूह में, 37 कॉफी, 52 चाय पसंद करते हैं और प्रत्येक व्यक्ति दोनों में से कम से कम एक पेय पसंद करता है, तो कितने व्यक्ति कॉफी और चाय दोनों को पसंद करते हैं?

Q29. एक कमेटी में, 50 व्यक्ति फ्रेंच, 20 व्यक्ति स्पेनिश और 10 व्यक्ति स्पेनिश और फ्रेंच दोनों ही भाषाओं को

बोल सकते हैं | कितने व्यक्ति इन दोनों ही भाषाओं में से कम से कम एक भाषा बोल सकते हैं?

Q30. किसी स्कूल के 400 विद्यार्थियों के सर्वेक्षण में 100 विद्यार्थी सेब का रस, 150 विद्यार्थी संतरे का रस और 75 विद्यार्थी सेब तथा संतरे दोनों का रस पीने वाले पाए जाते हैं| ज्ञात कीजिए कि कितने विद्यार्थी न तो सेब का रस पीते हैं और न ही संतरे का?

Q31. 200 व्यक्ति किसी चर्म रोग से पीड़ित हैं, इनमें 120 व्यक्ति रसायन C_1, 50 व्यक्ति रसायन C_2, और 30 व्यक्ति रसायन C_1 और C_2 दोनों ही से प्रभावित हुए हैं, तो ऐसे व्यक्तियों की संख्या ज्ञात कीजिए जो प्रभावित हुए हों:

(i) रसायन C_1 किन्तु रसायन C_2 से नहीं,

(ii) रसायन C_2 किन्तु रसायन C_1 से नहीं

(iii) रसायन C_1 अथवा रसायन C_2 से

प्रभावित हुए हैं |

Q32. 65 व्यक्तियों के समूह में, 40 व्यक्ति क्रिकेट, और 10 व्यक्ति क्रिकेट तथा टेनिस दोनों को पसंद करते हैं, तो कितने व्यक्ति केवल टेनिस को पसंद करते हैं किन्तु क्रिकेट को नहीं? कितने व्यक्ति टेनिस को पसंद करते हैं?

Q33. किसी विद्यालय के 600 विद्यार्थियों के सर्वेक्षण से ज्ञात हुआ कि 150 विद्यार्थी चाय, 225 विद्यार्थी कॉफी तथा 100 विद्यार्थी चाय और कॉफी दोनों पीते हैं | ज्ञात कीजिए कि कितने विद्यार्थी न तो चाय पीते हैं और न कॉफी पीते हैं |

....

उत्तरमाला

(वस्तुनिष्ठ प्रश्न)

A1. 1. (d) सुपरिभाषित संग्रह नहीं है   2. (b) A 3. (d) $\{3,4\}$ 4. (a) 1

5. (b) 2   6. (c) B 7. (b) A 8. (b)8   9. (a) $\{1, -2\}$

A2. 1. $\{1, 3\}$ 2. रिक्त समुच्चय   3. U   4. A 5. ϕ 6. ϕ

7. A 8. ϕ 9.परिमित   10.समान

उ. 3 (i).↔ (b), (ii).↔ (c), (iii).↔ (d), (iv).↔ (e), (v).↔ (a)

A4. 1. 2^n 2. $\{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$ 3. $\{2, 4, 5, 6, 8\}$

4. $\{-2, 1\}$ 5. $\{o, a, l\}$ 6. 5

7. $\{b, h, p\}$ 8. 0   9. $\{a, d, f, h\}$

A5. 1. सत्य   2. असत्य   3.सत्य   4.असत्य   5.सत्य

....

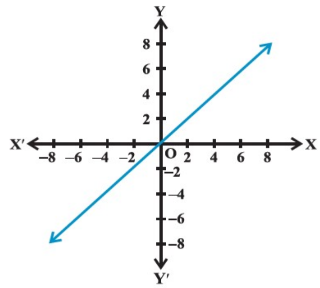
अध्याय 2: संबंध एवं फलन

- दो अरिक्त समुच्चयों A तथा B का कार्तीय गुणन $A \times B$ द्वारा निरूपित किया जाता है तथा इस प्रकार से परिभाषित होता है:
  $A \times B = \{(a, b) : a \in A, b \in B\}$
  यहाँ (a, b) एक क्रमित युग्म कहलाता है ।
- यदि समुच्चयों A या B में से कोई भी एक समुच्चय रिक्त समुच्चय होता है तो $A \times B = \phi$

- दो क्रमित युग्म समान होते हैं यदि और केवल यदि उनके संगत घटक समान हों ।
- यदि $n(A) = p$ तथा $n(B) = q$ तो $n(A \times B) = pq$.
- A या B में से कोई अपरिमित समुच्चय है तो $A \times B$ अपरिमित समुच्चय होता है ।
- $A \times A \times A = \{(a, b, c) : a, b, c \in A\}$. यहाँ (a, b, c) एक क्रमित त्रिक कहलाता है
- किसी अरिक्त समुच्चय A से अरिक्त समुच्चय B में संबंध (R), कार्तीय गुणन $A \times B$ का उपसमुच्चय होता है । इस उपसमुच्चय के प्रत्येक क्रमित युग्म के प्रथम घटक एवं द्वितीय घटक के मध्य एक संबंध स्थापित होता है । द्वितीय घटक को प्रथम घटक का प्रतिबिंब (Image) कहते हैं ।
- $R : A \to B$
  $R \subseteq A \times B$
- किसी अरिक्त समुच्चय A से अरिक्त समुच्चय B में संबंध R के सभी क्रमित युग्मों के प्रथम घटकों के समुच्चय को संबंध R का प्रांत (Domain) कहते हैं ।
- किसी अरिक्त समुच्चय A से अरिक्त समुच्चय B में संबंध R के सभी क्रमित युग्मों के द्वितीय घटकों के समुच्चय को संबंध R का परिसर (Range) कहते हैं ।
- किसी अरिक्त समुच्चय A से अरिक्त समुच्चय B में यदि कोई संबंध R परिभाषित है तो समुच्चय B, संबंध R का सह-प्रांत (Co-domain) कहलाता है ।
- किसी संबंध R का परिसर (Range) उस संबंध के सह-प्रांत (Co-domain) का उपसमुच्चय (Subset) होता है, अर्थात परिसर (Range) $\subseteq$ सह-प्रांत (Co-domain) ।
- किसी संबंध का बीजीय निरूपण (algebraic representation) या तो रोस्टर विधि या समुच्चय निर्माण विधि (set builder form) द्वारा किया जा सकता है ।
- तीर आरेख (Arrow diagram) किसी संबंध का दृष्टि चित्रण (visual representation) होता है ।
- किसी अरिक्त समुच्चय A से अरिक्त समुच्चय B में संबंधों की कुल खंख्या, कार्तीय गुणन $A \times B$ के उपसमुच्चयों की कुल संख्या के बराबर होती है ।
- यदि $n(A) = p$ तथा $n(B) = q$ तो $n(A \times B) = pq$ तथा A से B में संबंधों की कुल संख्या $= 2^{pq}$.
- यदि कोई संबंध A से A पर परिभाषित है तो इसे 'A पर संबंध' भी कहते हैं ।
- किसी अरिक्त समुच्चय A से अरिक्त समुच्चय B में संबंध f एक फलन कहलाता है यदि A के प्रत्येक अवयव (पूर्व प्रतिबिंब) का B में एक और केवल एक अवयव (प्रतिबिंब) हो ।
  $f : A \to B$
- फलन f के सभी क्रमित युग्मों के प्रथम घटकों के समुच्चय को फलन f का प्रांत (Domain) कहते हैं ।
- फलन f के सभी क्रमित युग्मों के द्वितीय घटकों के समुच्चय को फलन f का परिसर (Range) कहते हैं ।
- किसी अरिक्त समुच्चय A से अरिक्त समुच्चय B में यदि कोई फलन f परिभाषित है तो समुच्चय B, फलन f का सह-प्रांत (Co-domain) कहलाता है ।
- किसी फलन f का परिसर (Range) उस फलन f के सह-प्रांत (Co-domain) का उपसमुच्चय (Subset) होता है, अर्थात परिसर (Range) $\subseteq$ सह-प्रांत (Co-domain) ।
- किसी फलन f का बीजीय निरूपण (algebraic representation) या तो रोस्टर विधि या समुच्चय निर्माण विधि (set builder form) द्वारा किया जा सकता है ।
- फलन f का परिसर (Range) यदि वास्तविक संख्याओं का समुच्चय या उसका कोई उपसमुच्चय हो, तो फलन f वास्तविक मान फलन कहलाता है ।
- $f(x) = ax + b$, $x \in R$ एक रैखिक फलन कहलाता है, जहाँ a तथा b अचर हैं ।
- **तत्समक फलन (Identity Function) :**
  एक वास्तविक मान फलन $f : R \to R$, तत्समक फलन (Identity Function) कहलाता है यदि प्रत्येक $x \in R$, के लिये $y = f(x) = x$.

प्रान्त $Domain\,(f) = R$

परिसर $Range\,(f) = R$



$f(x) = x$

- **अचर फलन (Constant Function) :**

  एक वास्तविक मान फलन $f: R \to R$, अचर फलन (Constant Function) कहलाता है यदि प्रत्येक $x \in R$, के लिये $y = f(x) = c$ जहाँ c एक अचर है ।

  प्रान्त $Domain\,(f) = R$

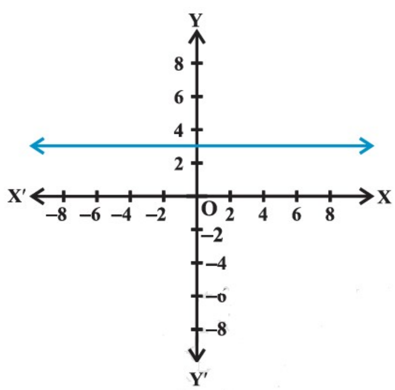
  परिसर $Range\,(f) = c$

  उदाहरण:

  प्रत्येक $x \in R$, के लिये $y = f(x) = 3$, जहाँ 3 एक अचर है ।

  प्रान्त $Domain\,(f) = R$

  परिसर $Range\,(f) = 3$



$f(x) = 3$

- **बहुपद फलन (Polynomial Function) :**

  एक वास्तविक मान फलन $f: R \to R$, एक बहुपदीय फलन (Polynomial Function) कहलाता है, यदि प्रत्येक $x \in R$, के लिये $y = f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \ldots + a_nx^n$ जहाँ n ऋणेतर पूर्णांक है तथा $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n \in R$ ।

  प्रान्त $Domain\,(f) = R$

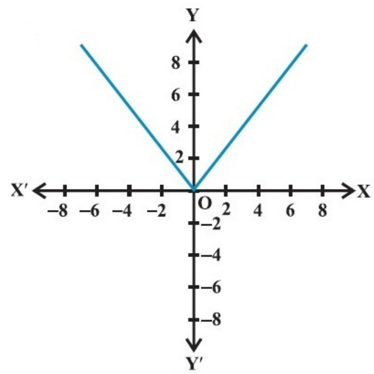
- **परिमेय फलन (Rational Function) :**

  यदि $f(x)$ तथा $g(x) \neq 0$ एक प्रांत (Domain) में x के बहुपदीय फलन (Polynomial Function) हैं तो फलन $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ एक परिमेय फलन कहलाता है ।

- **मापांक फलन (Modulus Function) :**

  एक वास्तविक मान फलन $f: R \to R$, मापांक फलन (Modulus Function) कहलाता है यदि प्रत्येक $x \in R$, के लिये $y = f(x) = |x|$.

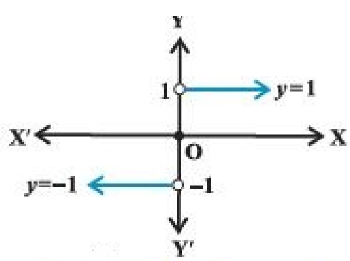
प्रान्त $Domain\,(f) = R$
परिसर $Range\,(f) = [0\,,\,\infty)$



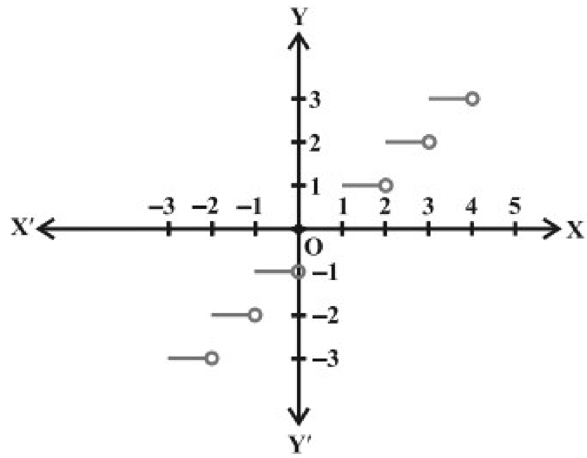
$f(x) = |x|$

- **चिन्ह फलन (Signum Function) :**
  एक वास्तविक मान फलन $f : R \rightarrow R$, मापांक फलन (Modulus Function) कहलाता है यदि प्रत्येक $x \in R$, के लिये $y = f(x) = \begin{cases} 1\,,\ if\ \ x > 0 \\ 0\,,\ if\ \ x = 0 \\ 1\,,\ if\ \ x < 0 \end{cases}$.

  प्रान्त $Domain\,(f) = R$
  परिसर $Range\,(f) = \{-1\,,\,0\,,\,1\}$



- **महत्तम पूर्णांक फलन (Greatest Integer Function) :**
  एक वास्तविक मान फलन $f : R \rightarrow R$, महत्तम पूर्णांक फलन (Greatest Integer Function) कहलाता है यदि प्रत्येक $x \in R$, के लिये $y = f(x) = [x]$.
  प्रान्त $Domain\,(f) = R$
  परिसर $Range\,(f) = I = Set\ of\ Integers$ = पूर्णांकों का समुच्चय



$f(x) = [x]$

- **वास्तविक फलनों का बीजगणित (Algebra of real functions) :**

✓ **दो वास्तविक फलनों का योग (Addition)**

दो वास्तविक फलनों $f : X \to R$ तथा $g : X \to R$, जहाँ $X \subset R$, के लिये $(f + x): X \to R$ को प्रत्येक $x \in R$, के लिये $(f + x)(x) = f(x) + g(x)$ द्वारा परिभाषित किया जाता है ।

✓ **दो वास्तविक फलनों का व्यवकलन (Subtraction)**

दो वास्तविक फलनों $f : X \to R$ तथा $g : X \to R$, जहाँ $X \subset R$, के लिये $(f - x): X \to R$ को प्रत्येक $x \in R$, के लिये $(f - x)(x) = f(x) - g(x)$ द्वारा परिभाषित किया जाता है ।

✓ **अदिश का वास्तविक फलन से गुना (Multiplication)**

वास्तविक फलन $f : X \to R$ का किसी अदिश α से गुणन को प्रत्येक $x \in R$, के लिये $(\alpha f)(x) = \alpha f(x)$, $x \in X$ द्वारा परिभाषित किया जाता है ।

✓ **दो वास्तविक फलनों का गुणन (Multiplication)**

दो वास्तविक फलनों $f : X \to R$ तथा $g : X \to R$, जहाँ $X \subset R$, के लिये $(f.x): X \to R$ को प्रत्येक $x \in R$, के लिये $(f.x)(x) = f(x).g(x)$ द्वारा परिभाषित किया जाता है ।

Q1. सही विकल्प चुनिये:

1. फलन $f(x) = x$ कहलाता है:

(a) तत्समक फलन (b) अचर फलन (c) मापांक फलन (d) चिन्ह फलन

2. फलन $f(x) = c$, जहाँ c एक अचर है, कहलाता है:

(a) तत्समक फलन (b) अचर फलन (c) मापांक फलन (d) चिन्ह फलन

3. फलन $f(x) = |x|$ कहलाता है:

(a) तत्समक फलन (b) अचर फलन (c) मापांक फलन (d) चिन्ह फलन

4. यदि $(a + 1, b - 2) = (3, 1)$ तो a व b के मान क्रमशः होंगे:

(a) $2 , 3$ (b) $-2 , -3$ (c) $2 , -3$ (d) $-2 , 3$

5. यदि $A = \{1 , 2\}$ और $B = \{3 , 4\}$ तब A से B पर संबंधों की संख्या होगी:

(a) 2 (b) 4 (c) 8 (d) 16

6. दो परिभाषित समुच्चय A तथा B इस प्रकार हैं कि $n(A) = 2, n(B) = 3$ तब A से B में संबंधों की संख्या होगी:

(a) 64 (b) 4 (c) 8 (d) 16

7. यदि A तथा B दो समुच्चय हैं , तब $A \times B = B \times A$ यदि और केवल यदि

(a) $A \subseteq B$ (b) $B \subseteq A$ (c) $A = B$ (d) $A \supseteq B$

Q2. रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए:

1. $A \times \phi = ...$
2. A या B में से कोई अपरिमित समुच्चय है तो $A \times B$ .... समुच्चय होता है |
3. किसी अरिक्त समुच्चय A से अरिक्त समुच्चय B में संबंध (R), कार्तीय गुणन $A \times B$ का .... होता है |
4. किसी अरिक्त समुच्चय A से अरिक्त समुच्चय B में संबंध R के सभी क्रमित युग्मों के प्रथम घटकों के समुच्चय को संबंध R का .... कहते हैं |

Q3. सही जोड़ी बनाइए :

स्तम्भ –A	स्तम्भ –B
(i) $f(x) = x, \quad \forall x \in R$	(a) ϕ
(ii) $y = f(x) = \lvert x \rvert, \quad \forall x \in R$	(b) तत्समक फलन
(iii) $y = f(x) = \begin{cases} 1, & if\ x > 0 \\ 0, & if\ x = 0, \\ 1, & if\ x < 0 \end{cases} \quad \forall x \in R$	(c) मापांक फलन
(iv) $y = f(x) = [x], \quad \forall x \in R$	(d) चिन्ह फलन
(v) $A \times \phi$	(e) महत्तम पूर्णांक फलन

Q4. एक शब्द या वाक्य में उत्तर लिखिए:

1. यदि $A = \{1, 2\}$ और $B = \{3, 4\}$ तो समुच्चय $A \times B$ ज्ञात कीजिए |
2. एक फलन $f(x) = 2x - 5$ द्वारा परिभाषित है तो $f(-3)$ का मान लिखिए |
3. यदि $A = \{1, 2\}$ और $B = \{3, 4\}$ तो A से B में संबंधों की संख्या कितनी होगी ?
4. यदि $X = \{1, 2\}$ तथा $Y = \{4, 5, 6\}$ तो $X \times Y$ क्या होगा?

Q5. सत्य / असत्य लिखिए :

1. $A \times \phi = A$
2. $A \times \phi = \phi$
3. दो क्रमित युग्म समान होते हैं, यदि और केवल यदि उनके संगत प्रथम घटक समान हों और संगत द्वितीय घटक भी समान हों |
4. $A \times A \times A = \{(a, b, c) : a, b, c \in A\}$. यहाँ (a, b, c) एक क्रमित त्रिक कहलाता है |
5. किसी संबंध R का परिसर (Range) उस संबंध के सह-प्रांत (Co–domain) का उपसमुच्चय (Subset) होता है, अर्थात परिसर (Range) $\subseteq$ सह-प्रांत (Co–domain) |
6. यदि $n(A) = p$ तथा $n(B) = q$ तो $n(A \times B) = pq$ तथा A से B में संबंधों की कुल संख्या $= 2^{pq}$.

Q6. यदि $f, g : R \to R$ क्रमशः $f(x) = x + 1,\ g(x) = 2x - 3$ द्वारा परिभाषित हैं | $f + g$ और $f - g$ ज्ञात कीजिए|

Q7. यदि $f, g : R \to R$ क्रमशः $f(x) = x+1$, $g(x) = 2x-3$ द्वारा परिभाषित है | $f.g$ और $\frac{f}{g}$ ज्ञात कीजिए |

Q8. यदि $f(x) = x^2$ तथा $g(x) = 2x+1$ हो तो $(f+g)(x)$ और $(f-g)(x)$ ज्ञात कीजिए |

Q9. यदि $f(x) = x^2$ तथा $g(x) = 2x+1$ हो तो $(f.g)(x)$ और $\left(\frac{f}{x}\right)(x)$ ज्ञात कीजिए |

Q10. यदि $f(x) = \sqrt{x}$ तथा $g(x) = x$, ऋणेत्तर वास्तविक संख्याओं के लिए परिभाषित दो फलन हैं तो $(f+g)(x)$ और $(f-g)(x)$ ज्ञात कीजिए|

Q11. यदि $f(x) = \sqrt{x}$ तथा $g(x) = x$, ऋणेत्तर वास्तविक संख्याओं के लिए परिभाषित दो फलन हैं तो $(f.g)(x)$ और $\left(\frac{f}{x}\right)(x)$ ज्ञात कीजिए|

Q12. यदि $A = \{1, 2\}$, $B = \{1, 2, 3\}$, $C = \{5, 6\}$ तथा $D = \{5, 6, 7, 8\}$. सत्यापित कीजिए कि $A \times C$, $B \times D$ का एक उपसमुच्चय है|

Q13. यदि $A = \{1,2,3,4,5,6\}$, $R = \{(x, y) : y = x+1\}$ द्वारा A से A में एक संबंध परिभाषित कीजिए | (i) इस संबंध को एक तीर आरेख द्वारा दर्शाइए | (ii) R के प्रांत, सह-प्रांत तथा परिसर लिखिए |

Q14. यदि $A = \{1, 2, 3, ..., 14\}$. $R = \{(x, y) : 3x - y = 0 , x, y \in A\}$ द्वारा, A से A का एक संबंध R लिखिए | इसके प्रांत, सह-प्रांत और परिसर लिखिए |

Q15. प्राकृत संख्याओं के समुच्चय पर

$R = \{(x, y) : y = x+5 ,$ x संख्या 4 से कम, एक प्राकृत संख्या है, $x, y \in N\}$

द्वारा एक संबंध R परिभाषित कीजिए | इस संबंध को (i) रोस्टर रूप में लिखिए (ii) इसके प्रांत और परिसर लिखिए |

Q16. यदि $A = \{1, 2, 3, 4, 6\}$ और R, A पर $\{(a, b) : a, b \in A,$ संख्या a संख्या b को यथावत विभाजित करती है $\}$ द्वारा परिभाषित एक संबंध है | (i) R को रोस्टर रूप में लिखिए (ii) R का प्रांत ज्ञात कीजिए| (iii) R का परिसर ज्ञात कीजिए |

Q17. $R = \{(x, x+5) : x \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}\}$ द्वारा परिभाषित संबंध R के प्रांत और परिसर ज्ञात कीजिए |

Q18. यदि N प्राकृत संख्याओं का समुच्चय है और N पर परिभाषित एक संबंध R इस प्रकार है कि $R = \{(x, y) : y = 2x , x, y \in N\}$. R के प्रांत, सह-प्रांत और परिसर क्या हैं? क्या यह संबंध, एक फलन है?

Q19. फलन $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$ का प्रांत (Domain) तथा परिसर (Range) ज्ञात कीजिए |

Q20. फलन $f(x) = \sqrt{(x-1)}$ द्वारा परिभाषित वास्तविक फलन f का प्रांत (Domain) तथा परिसर (Range) ज्ञात कीजिए |

Q21. यदि $f(x) = x^2$ हो तो $\frac{f(1.1) - f(1)}{(1.1 - 1)}$ का मान ज्ञात कीजिए |

Q22. फलन $f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x^2 - 8x + 12}$ का प्रांत ज्ञात कीजिए |

Q23. फलन $f(x) = \frac{x^2 + 3x + 5}{x^2 - 5x + 4}$ का प्रांत ज्ञात कीजिए |

Q24. यदि $f=\{(1,1),(2,3),(0,-1),(-1,-3)\}$, Z से Z में एक रैखिक फलन है तो $f(x)$ ज्ञात कीजिए |

अथवा

यदि $f=\{(1,1),(2,3),(0,-1),(-1,-3)\}$, Z से Z में, $f(x)=ax+b$, द्वारा परिभाषित एक फलन , जहाँ a ,b, कोई दो पूर्णांक हैं तो a ,b, को निर्धारित करते हुए $f(x)$ ज्ञात कीजिए |

Q25. यदि $f(x)=x^2+2x-3$ हो तो $f(0)$, $f(-1)$, $f\left(\frac{1}{3}\right)$, $f(\sin x)$ के मान ज्ञात कीजिए |

Q26. फलन 't' सेल्सियस तापमान का फारेनहाइट तापमान में प्रतिचित्रण करता है, जो $t(C)=\frac{9C}{5}+32$ द्वारा परिभाषित है. निम्नलिखित को ज्ञात कीजिए:

(i) $t(0)$ (ii) $t(28)$ (iii) $t(-10)$ (iv) C का मान जब $t(C)=212$.

****

उत्तरमाला
(वस्तुनिष्ठ प्रश्न)

A1. 1. (a) तत्समक फलन 2. (b) अचर फलन 3. (c) मापांक फलन 4. (a) 2 , 3
5. (d) 16 6. (a) 64 7. (c) $A=B$

A2. 1. ϕ 2. अपरिमित 3. उपसमुच्चय 4. प्रान्त

A. 3 (i).↔ (b), (ii).↔ (c), (iii).↔ (d), (iv).↔ (e), (v).↔ (a)

A4. 1. $A\times B=\{(1,3),(1,4),(2,3),(2,4)\}$ 2. -11 3. 16
4. $X\times Y=\{(1,4),(1,5),(1,6),(2,4),(2,5),(2,6)\}\}$

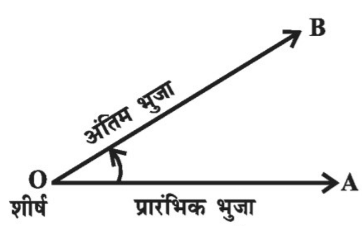
A5. 1. असत्य 2. सत्य 3. सत्य 4. सत्य 5. सत्य 6. सत्य

....

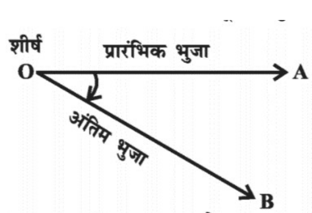
अध्याय 3: त्रिकोणमितीय फलन

स्मरणीय बिंदु

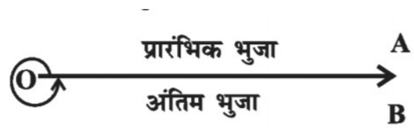
- Trigonometry शब्द की व्युत्पत्ति ग्रीक शब्दों Tri , gone और metron से हुई है जिनका संयुक्त रूप से अर्थ ' त्रिभुज की भुजाओं को मापना ' होता है |
- एक कोण वह माप है जो एक किरण के उसके प्रारम्भिक बिन्दु के परित: घूमने पर बनता है |



(i) धनात्मक कोण



(ii) ऋणात्मक कोण



- डिग्री माप: एक पूर्ण परिक्रमण का 360वाँ भाग एक डिग्री कहलाता है |
  अर्थात एक पूर्ण परिक्रमण $= 360^0$.
  एक डिग्री का साठवाँ भाग एक मिनट कहलाता है | इसे हम $1^0 = 60'$ से लिखते हैं |
  एक मिनट का साठवाँ भाग एक सेकंड कहलाता है | इसे हम $1' = 60''$ से लिखते हैं |
- रेडियन माप: इकाई वृत्त के केंद्र पर एक इकाई लंबाई के चाप द्वारा बने कोण को एक रेडियन कहते हैं|
- डिग्री तथा रेडियन के मध्य संबंध : वृत, केंद्र पर एक कोण बनाता है जिसकी माप 2π रेडियन है तथा यह 360^0 माप है | 2π रेडियन $= 360$ डिग्री
- इकाई त्रिज्या के वृत्त की परिधि $= 2\pi$
- एक पूर्ण परिक्रमण $= 2\pi$ रेडियन
- $2\pi^c = 360^0$
- π रेडियन $= 180$ डिग्री
- रेडियन माप $= \dfrac{180}{\pi}$ डिग्री माप
- डिग्री माप $= \dfrac{\pi}{180}$ रेडियन माप
- यदि एक वृत्त, जिसकी त्रिज्या r है, चाप की लंबाई l तथा केंद्र पर अंकित कोण θ रेडियन है, तो $\theta = \dfrac{l}{r}$.
-

$\theta \Rightarrow$	0^0	30^0	45^0	60^0	90^0
$t.r. \Downarrow$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin\theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan\theta$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	∞
$\cos ec\theta$	∞	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	1
$\sec\theta$	1	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{2}$	2	∞
$\cot\theta$	∞	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0

- $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1 \Rightarrow 1 - \sin^2\theta = \cos^2\theta \Rightarrow 1 - \cos^2\theta = \sin^2\theta$

  $1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta \Rightarrow \sec^2\theta - 1 = \tan^2\theta \Rightarrow \sec^2\theta - \tan^2\theta = 1$

  $1 + \cot^2\theta = \cos ec^2\theta \Rightarrow \cos ec^2\theta - 1 = \cot^2\theta \Rightarrow \cos ec^2\theta - \cot^2\theta = 1$
- $\sin\theta.\cos ec\theta = 1 \Rightarrow \frac{1}{\sin\theta} = \cos ec\theta \Rightarrow \frac{1}{\cos ec\theta} = \sin\theta$

  $\cos\theta.\sec\theta = 1 \Rightarrow \frac{1}{\cos\theta} = \sec\theta \Rightarrow \frac{1}{\sec\theta} = \cos\theta$

  $\tan\theta.\cot\theta = 1 \Rightarrow \frac{1}{\tan\theta} = \cot\theta \Rightarrow \frac{1}{\cot\theta} = \tan\theta$
- $\sin(90-\theta) = \cos\theta$

  $\cos(90-\theta) = \sin\theta$

  $\tan(90-\theta) = \cot\theta$

  $\cos ec(90-\theta) = \sec\theta$

  $\sec(90-\theta) = \cos ec\theta$

  $\cot(90-\theta) = \tan\theta$
- $\sin(90+\theta) = \cos\theta$

  $\cos(90+\theta) = -\sin\theta$

  $\tan(90+\theta) = -\cot\theta$

  $\cos ec(90+\theta) = \sec\theta$

  $\sec(90+\theta) = -\cos ec\theta$

  $\cot(90+\theta) = -\tan\theta$
- $\sin(180-\theta) = \sin\theta$

  $\cos(180-\theta) = -\cos\theta$

  $\tan(180-\theta) = -\tan\theta$

  $\cos ec(180-\theta) = \cos ec\theta$

  $\sec(180-\theta) = -\sec\theta$

  $\cot(180-\theta) = -\cot\theta$
- $\sin(180+\theta) = -\sin\theta$

  $\cos(180+\theta) = -\cos\theta$

  $\tan(180+\theta) = \tan\theta$

  $\cos ec(180+\theta) = -\cos ec\theta$

  $\sec(180+\theta) = -\sec\theta$

  $\cot(180+\theta) = \cot\theta$
- $\sin(270-\theta) = -\cos\theta$

  $\cos(270-\theta) = -\sin\theta$

$\tan(270-\theta)=\cot\theta$
$\operatorname{cosec}(270-\theta)=-\sec\theta$
$\sec(270-\theta)=-\operatorname{cosec}\theta$
$\cot(270-\theta)=\tan\theta$

- $\sin(270+\theta)=-\cos\theta$
  $\cos(270+\theta)=\sin\theta$
  $\tan(270+\theta)=-\cot\theta$
  $\operatorname{cosec}(270+\theta)=-\sec\theta$
  $\sec(270+\theta)=\operatorname{cosec}\theta$
  $\cot(270+\theta)=-\tan\theta$
- $\sin(360-\theta)=-\sin\theta$
  $\cos(360-\theta)=\cos\theta$
  $\tan(360-\theta)=-\tan\theta$
  $\operatorname{cosec}(360-\theta)=-\operatorname{cosec}\theta$
  $\sec(360-\theta)=\sec\theta$
  $\cot(360-\theta)=-\cot\theta$
- $\sin(360+\theta)=\sin\theta$
  $\cos(360+\theta)=\cos\theta$
  $\tan(360+\theta)=\tan\theta$
  $\operatorname{cosec}(360+\theta)=\operatorname{cosec}\theta$
  $\sec(360+\theta)=\sec\theta$
  $\cot(360+\theta)=\cot\theta$
- $\sin(2n\pi+\theta)=\sin\theta$
  $\cos(2n\pi+\theta)=\cos\theta$
  $\tan(2n\pi+\theta)=\tan\theta$
  $\operatorname{cosec}(2n\pi+\theta)=\operatorname{cosec}\theta$
  $\sec(2n\pi+\theta)=\sec\theta$
  $\cot(2n\pi+\theta)=\cot\theta$
- $\sin(-\theta)=-\sin\theta$
  $\cos(-\theta)=\cos\theta$
  $\tan(-\theta)=-\tan\theta$
  $\operatorname{cosec}(-\theta)=-\operatorname{cosec}\theta$
  $\sec(-\theta)=\sec\theta$
  $\cot(-\theta)=\cot\theta$

- $$\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B$$
  $$\sin(A-B)=\sin A\cos B-\cos A\sin B$$
  $$\cos(A+B)=\cos A\cos B-\sin A\sin B$$
  $$\cos(A-B)=\cos A\cos B+\sin A\sin B$$
  $$\tan(A+B)=\frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}$$
  $$\tan(A-B)=\frac{\tan A-\tan B}{1+\tan A\tan B}$$
  $$\cot(A+B)=\frac{\cot A\cot B-1}{\cot A+\cot B}$$
  $$\cot(A-B)=\frac{\cot A\cot B+1}{\cot B-\cot A}$$
- $$\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta=\frac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta}$$
  $$\cos 2\theta=\cos^2\theta-\sin^2\theta=2\cos^2\theta-1=1-2\sin^2\theta=\frac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}$$
  $$\tan 2\theta=\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$$
- $$1+\cos 2\theta=2\cos^2\theta$$
  $$1-\cos 2\theta=2\sin^2\theta$$
- $$\sin\theta=2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}=\frac{2\tan\frac{\theta}{2}}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}}$$
  $$\cos\theta=\cos^2\frac{\theta}{2}-\sin^2\frac{\theta}{2}=2\cos^2\frac{\theta}{2}-1=1-2\sin^2\frac{\theta}{2}=\frac{1-\tan^2\frac{\theta}{2}}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}}$$
  $$\tan\theta=\frac{2\tan\frac{\theta}{2}}{1-\tan^2\frac{\theta}{2}}$$
- $$1+\cos\theta=2\cos^2\frac{\theta}{2}$$
  $$1-\cos\theta=2\sin^2\frac{\theta}{2}$$
- $$\sin 3\theta=3\sin\theta-4\sin^3\theta$$
  $$\cos 3\theta=4\cos^3\theta-3\sin\theta$$
  $$\tan 3\theta=\frac{3\tan\theta-\tan^3\theta}{1-3\tan^2\theta}$$

- $\sin C+\sin D=2\sin\frac{C+D}{2}\cos\frac{C-D}{2}$

  $\sin C-\sin D=2\cos\frac{C+D}{2}\sin\frac{C-D}{2}$

  $\cos C+\cos D=2\cos\frac{C+D}{2}\cos\frac{C-D}{2}$

  $\cos C\cos D=-2\sin\frac{C+D}{2}\sin\frac{C-D}{2}$

- $2\sin A\cos B=\sin(A+B)+\sin(A-B)$

  $2\cos A\sin B=\sin(A+B)-\sin(A-B)$

  $2\cos A\cos B=\cos(A+B)+\cos(A-B)$

  $2\sin A\sin B=\cos(A-B)-\cos(A+B)$

Q1. सही विकल्प चुनिये

(1) $225°$ की रेडियन माप होती है:

$(a)\ \frac{3\pi}{4}$ $(b)\ \frac{4\pi}{3}$ $(c)\ \frac{5\pi}{4}$ $(d)\ \frac{4\pi}{5}$

(2) $\frac{7\pi}{6}$ रेडियन माप की संगत डिग्री माप होती है:

$(a)\ 150°$ $(b)\ 210°$ $(c)\ 135°$ $(d)\ 300°$

(3) फलन $y=\cos x$ का परिसर $(Range)$ होती है:

$(a)\ (-1,1)$ $(b)\ [-1,1]$ $(c)\ (-\infty,\infty)$ $(d)\ [0,\pi]$

(4) $\sin^2\frac{\pi}{6}+\cos^2\frac{\pi}{3}$ का मान होता है:

$(a)\ 1$ $(b)\ 1/2$ $(c)\ -1/2$ $(d)\ 0$

(5) $sin15°$ का मान है:

$(a)\ \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$ $(b)\ \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$ $(c)\ \sqrt{3}-2$ $(d)\ 2-\sqrt{3}$

(6) cos एवं sec फलन किन चतुर्थांशों में धनात्मक होते है:

(a) प्रथम एवं तृतीय (b) प्रथम एवं द्वितीय (c) प्रथम एवं चतुर्थ (d) सभी चतुर्थांसों में

Q2. रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिये।

(i) $\sin\alpha=\frac{1}{2}$ हो तो $\sin 2\alpha=$ ………. होगा |

(ii) $cosec\frac{7\pi}{6}$ का मान ……… होता है |

Q3. सही जोड़ी मिलाइए:

1.

स्तम्भ – A	स्तम्भ - B
1. $\sec^2 x-1$	a. $\cos x$
2. $\tan 2x$	b. $\frac{180}{\pi}$ डिग्री माप
3. $\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$	c. $\tan^2 x$
4. रेडियन माप	d. $\sin x$
5. $\sin(2n\pi+x)$	e. $\frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$

2.

स्तम्भ – A	स्तम्भ - B
1. 180^{o}	a. $\tan\theta$
2. $\cos\pi$	b. $-\tan\theta$
3. $\tan(-\theta)$	c. π^{c}
4. $\sec(90-\theta)$	d. -1
5. $\cot 30^{o}$	e. 1
	f. $\cos ec\theta$
	g. $\sqrt{3}$

3.

स्तम्भ – A	स्तम्भ - B
1. $2\sin A\cos A$	a. $\sin 3\theta$
2. $1-2\sin^{2}A$	b. $\cos 3\theta$
3. $\dfrac{2\tan A}{1-\tan^{2}A}$	c. $\sin 2A$
4. $3\sin\theta-4\sin^{3}\theta$	d. $\cos 2A$
5. $4\cos^{3}\theta-3\cos\theta$	e. $\tan 2A$

4.

स्तम्भ – A	स्तम्भ - B
1. $\sin 15^{\circ}$	a. $\dfrac{2\tan x}{1-\tan^{2}x}$
2. $\sin 2x$	b. $\dfrac{1-\tan^{2}x}{1+\tan^{2}x}$
3. $\tan 2x$	c. $\dfrac{2\tan x}{1+\tan^{2}x}$
4. $\cos 2x$	d. $\dfrac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$
5. $\cos 15^{\circ}$	e. $\dfrac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$

Q4. एक शब्द या वाक्य में उत्तर लिखिए:

1. रेडियन माप और डिग्री माप में संबंध लिखिए |
2. एक डिग्री में कितने मिनट होते हैं |
3. कोण को परिभाषित कीजिए |

Q5. सत्य/ असत्य लिखिए:

1. एक कोण वह माप है जो एक किरण के उसके प्रारम्भिक बिन्दु के परित: घूमने पर बनता है |

2. एक पूर्ण परिक्रमण का 180वाँ भाग एक डिग्री कहलाता है |

3. इकाई वृत्त के केंद्र पर एक इकाई लंबाई के चाप द्वारा बने कोण को एक रेडियन कहते हैं|

4. रेडियन माप $=\frac{180}{\pi}$ डिग्री माप

5. यदि एक वृत्त, जिसकी त्रिज्या r है, चाप की लंबाई l तथा केंद्र पर अंकित कोण θ रेडियन है, तो $\theta=\frac{l}{r}$.

Q6. $40^0 20'$ को रेडियन माप में बदलिए |

Q7. 6 रेडियन को डिग्री माप में बदलिए |

Q8. 25^0 को रेडियन माप में बदलिए |

Q9. $\frac{11}{16}$ रेडियन को डिग्री माप में बदलिए |

Q10. $\sin 15^0$ का मान ज्ञात कीजिए |

Q11. $\sin 75^0$ का मान ज्ञात कीजिए |

Q12. $\tan 15^0$ का मान ज्ञात कीजिए |

Q13. उस वृत की त्रिज्या ज्ञात कीजिए जिसमें 60^0 का केंद्रीय कोण परिधि पर 37.4 सेमी लंबाई का चाप काटता है | ($\pi=\frac{22}{7}$ का प्रयोग करें)

Q14. एक घड़ी में मिनट की सुई 1.5 सेमी लंबी है | इसकी नोक 40 मिनट में कितनी दूर जा सकती है? ($\pi=3.14$ का प्रयोग करें)

Q15. एक वृत, जिसका व्यास 40 सेमी है, की एक जीवा 20 सेमी लंबाई की है तो इसके संगत छोटे चाप की लंबाई ज्ञात कीजिए |

Q16. एक पहिया एक मिनट में 360 परिक्रमण करता है तो एक सेकण्ड में कितने रेडियन माप का कोण बनाएगा?

Q17. यदि दो वृतों के चापों की लंबाई समान हो और वे अपने केंद्र पर क्रमशः 65^0 तथा 110^0 का कोण बनाते हैं, तो उनकी त्रिज्याओं का अनुपात ज्ञात कीजिए |

Q18. यदि दो वृतों के चापों की लंबाई समान हों और वे अपने केंद्र पर क्रमशः 60^0 तथा 75^0 का कोण बनाते हैं, तो उनकी त्रिज्याओं का अनुपात ज्ञात कीजिए |

Q19. 75 सेमी लंबाई वाले एक दोलायमन दोलक का एक सिरे से दूसरे सिरे तक दोलन करने से जो कोण बनता है, उसका माप रेडियन में ज्ञात कीजिए, जबकि उसके नोक द्वारा बनाए गए चाप की लंबाई 21 सेमी है |

Q20. सिद्ध कीजिए कि $3\sin\frac{\pi}{6}\sec\frac{\pi}{3}-4\sin\frac{5\pi}{6}\cot\frac{\pi}{4}=1$.

Q21. सिद्ध कीजिए कि $\sin^2\frac{\pi}{6}+\cos^2\frac{\pi}{3}-\tan^2\frac{\pi}{4}=-\frac{1}{2}$.

Q22. सिद्ध कीजिए कि $2\sin^2\frac{\pi}{6}+\cos ec^2\frac{7\pi}{6}\cos^2\frac{\pi}{3}=\frac{3}{2}$.

Q23. $\tan\frac{13\pi}{12}$ का मान ज्ञात कीजिए |

Q24. सिद्ध कीजिए कि $\frac{\sin(x+y)}{\sin(x-y)}=\frac{\tan x+\tan y}{\tan x-\tan y}$.

Q25. सिद्ध कीजिए कि $\frac{\tan\left(\frac{\pi}{4}+x\right)}{\tan\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}=\left(\frac{1+\tan x}{1-\tan x}\right)^2$.

Q26. दर्शाईए कि $\tan 3x\tan 2x\tan x=\tan 3x-\tan 2x-\tan x$.

Q27. सिद्ध कीजिए कि $\frac{\cos 7x+\cos 5x}{\sin 7x-\sin 5x}=\cot x$.

Q28. सिद्ध कीजिए कि $\frac{\cos 9x-\cos 5x}{\sin 17x-\sin 3x}=-\frac{\sin 2x}{\cos 10x}$.

Q29. सिद्ध कीजिए कि $\frac{\sin 5x+\sin 3x}{\cos 5x+\cos 3x}=\tan 4x$.

Q30. सिद्ध कीजिए कि $\frac{\sin x-\sin y}{\cos x+\cos y}=\tan\frac{x-y}{2}$.

Q31. सिद्ध कीजिए कि $\frac{\sin x+\sin 3x}{\cos x+\cos 3x}=\tan 2x$.

Q32. यदि $\cos x=-\frac{3}{5}$ हो और x तृतीय चतुर्थांश में स्थित है, तो अन्य पाँच त्रिकोणमितीय अनुपातों के मान ज्ञात कीजिए |

Q33. यदि $\cos x=-\frac{1}{2}$ हो और x तृतीय चतुर्थांश में स्थित है, तो अन्य पाँच त्रिकोणमितीय अनुपातों के मान ज्ञात कीजिए |

Q34. यदि $\sin x=\frac{3}{5}$ हो और x दूसरे चतुर्थांश में स्थित है, तो अन्य पाँच त्रिकोणमितीय अनुपातों के मान ज्ञात कीजिए |

Q35. यदि $\tan x=-\frac{5}{12}$ हो और x दूसरे चतुर्थांश में स्थित है, तो अन्य पाँच त्रिकोणमितीय अनुपातों के मान ज्ञात कीजिए |

Q36. सिद्ध कीजिए कि $\cos\left(\frac{\pi}{4}+x\right)+\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=\sqrt{2}\cos x$.

Q37. सिद्ध कीजिए कि $\frac{\sin 5x-2\sin 3x+\sin x}{\cos 5x-\cos x}=\tan x$.

Q38. सिद्ध कीजिए कि $\sin x+\sin 3x+\sin 5x+\sin 7x=4\cos x\cos 2x\sin 4x$.

Q39. सिद्ध कीजिए कि $\cos 4x=1-8\sin^2 x\cos^2 x$.

Q40. सिद्ध कीजिए $\cos 2x \cos\frac{x}{2} - \cos 3x \cos\frac{9x}{2} = \sin 5x \sin\frac{5x}{2}$.

....

उत्तरमाला

(वस्तुनिष्ठ प्रश्न)

A1. $(1)\ c$, $(2)\ b$, $(3)\ b$, $(4)\ b$, $(5)\ a$, $(6)\ c$

A2. $(i)\ \frac{\sqrt{3}}{2}$, $(ii) - 2$

A3. 1. (1).↔ (c), (2).↔ (e), (3).↔ (a), (4).↔ (b), (5).↔ (d)

2. (1).↔ (c), (2).↔ (d), (3).↔ (b), (4).↔ (f), (5).↔ (g)

3. (1).↔ (c), (2).↔ (d), (3).↔ (e), (4).↔ (a), (5).↔ (b)

4. (1).↔ (e), (2).↔ (c), (3).↔ (a), (4).↔ (b), (5).↔ (d)

A4. 1. π रेडियन $= 180$ डिग्री

2. 60

3. एक कोण वह माप है जो एक किरण के उसके प्रारम्भिक बिन्दु के परित: घूमने पर बनता है |

A5. 1. सत्य 2.असत्य 3. सत्य 4. सत्य 5. सत्य

....

अध्याय 5: सम्मिश्र संख्याएँ और द्विघात समीकरण

स्मरणीय बिन्दुः-

- (iota) आयोटा $i = \sqrt{-1}$
- सम्मिश्र संख्या का प्रारूप $a + ib$, a तथा b वास्तविक संख्याएँ हैं। a को वास्तविक भाग एवं b को काल्पनिक भाग कहते हैं।
  $Z = a + ib$
  $R_e(z) = a$, $I_m(z) = b$
- सम्मिश्र संख्याओं का बीजगणित:
  मान लो $z_1 = a + ib$ तथा $z_2 = c + id$ दो समिश्र संख्याएँ हैं।
  1. क्रम विनिमेय नियम: $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$
  2. साहचर्य नियम : $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$
  3. योगात्मक तत्समक: $z + 0 = z$, जहाँ $0 = 0 + 0i$, योगात्मक तत्समक है।
  4. योगात्मक प्रतिलोम: $z + (-z) = 0$ यहाँ $-z$, z का योगात्मक प्रतिलोम है |
  5. सम्मिश्र संख्याओं का गुणनफल:
     $z_1 . z_2 = (ac - bd) + i(ad + bc)$
  6. गुणात्मक तत्समक: $z \cdot 1 = z$ जहाँ $1 = 1 + io$ गुणात्मक तत्समक है |
  7. गुणात्मक प्रतिलोम:
     $\frac{1}{z}$ या $z^{-1} = \frac{a}{a^2+b^2} + i\frac{-b}{a^2+b^2}$, $(a \neq 0,\ b \neq 0)$
- i की घात: $i = \sqrt{-1}$, $i^2 = i \cdot i = -1$
  $i^3 = i^2 \cdot i = -i$, $i^4 = (i^2)^2 = 1$
  $i^{-1} = \frac{1}{i} \times \frac{i}{i} = \frac{i}{i^2} = \frac{i}{-1} = -i$
  अर्थात् किसी पूर्णांक k के लिए
  $i^{4k} = 1$, $i^{4k+1} = i$, $i^{4k+2} = -1$, $i^{4k+3} = -i$
- सम्मिश्र संख्या का मापांक (Modulus) और संयुग्मी (Complex Conjugate) –
  माना $z = a + ib$,

मापांक $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

संयुग्मी $\bar{z} = a - ib$

- गुणात्मक प्रतिलोम: $z^{-1} = \frac{1}{a+ib} = \frac{a-ib}{a^2+b^2} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$
- $z.\bar{z} = |z|^2$
- $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$
- $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$
- $\overline{z_1.z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$
- $|\overline{z_1 \pm z_2}| = \bar{z}_1 \pm \bar{z}_2$
- $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$ यदि $z_2 \neq 0$.

Q1. सही विकल्प चुनिये:

1. यदि $4x + i(3x - y) = 3 + i(-6)$, जहाँ x और y वास्तविक संख्याएँ हैं, तब x और y के मान क्रमशः हैं:

   (a) $\frac{3}{4}$ और $\frac{33}{4}$ (b) $\frac{-3}{4}$ और $\frac{-33}{4}$

   (c) $\frac{-3}{4}$ और $\frac{33}{4}$ (d) $\frac{3}{4}$ और $\frac{-33}{4}$

2. i^4 का मान होगा:

   (a) -1 (b) 1 (c) $\sqrt{-1}$ (d) 0

3. $3 - 4i$ का संयुग्मी है:

   (a) $-3 + 4i$ (b) $3 - 4i$ (c) $-3 - 4i$ (d) $3 + 4i$

4. $2 - 3i$ का गुणात्मक प्रतिलोम है:

   (a) $\frac{2}{13} + \frac{3}{13}i$ (b) $-\frac{2}{13} - \frac{3}{13}i$ (c) $\frac{2}{13} - \frac{3}{13}i$ (d) $-\frac{2}{13} + \frac{3}{13}i$

Q2. रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए:

1. $-\sqrt{3} + i$ का मापांक .... होगा |
2. $i^{4k} =$ ....
3. $i^{4k+1} =$ ....
4. सम्मिश्र संख्या $-2 - i$ का संयुग्मी .... होगा |
5. $-i$ का गुणांत्मक प्रतिलोम .... होगा |

Q3. सत्य / असत्य लिखिए :

1. $\sqrt{-1} = i$
2. $i^2 = -1$
3. $i^3 = -i$
4. $i^4 = 1$
5. दो सम्मिश्र संख्याओं का योगफल एक सम्मिश्र संख्या होती है |

Q4. एक शब्द या वाक्य में उत्तर लिखिए:

1. $z=-i$ का गुणात्मक प्रतिलोम क्या होगा?
2. i^{-39} को $a+ib$ के रूप में व्यक्त कीजिए |
3. $z=a+ib$ का संयुग्मी लिखिए |

Q5. $(-i)(2i)\left(-\frac{1}{8}i\right)^3$ को $a+ib$ के रूप में व्यक्त कीजिए |

Q6. $\left(-\sqrt{3}+\sqrt{-2}\right)\left(2\sqrt{3}-i\right)$ को $a+ib$ के रूप में व्यक्त कीजिए |

Q7. $\left(\frac{1}{5}+i\frac{2}{5}\right)-\left(4+i\frac{5}{2}\right)$ को $a+ib$ के रूप में व्यक्त कीजिए |

Q8. $2-3i$ का गुणात्मक प्रतिलोम ज्ञात कीजिए |

Q9. $\sqrt{5}+3i$ का गुणात्मक प्रतिलोम ज्ञात कीजिए |

Q10. $z=4-3i$ का गुणात्मक प्रतिलोम ज्ञात कीजिए |

Q11. $-i$ का गुणात्मक प्रतिलोम ज्ञात कीजिए |

Q12. $\frac{1}{1+i}$ का मापांक ज्ञात कीजिए।

Q13. $\frac{\left(3+i\sqrt{5}\right)\left(3-i\sqrt{5}\right)}{\left(\sqrt{3}+2i\right)-\left(\sqrt{3}-i\sqrt{2}\right)}$ को $a+ib$ के रूप में व्यक्त कीजिए |

Q14. $\frac{5+\sqrt{2}i}{1-\sqrt{2}i}$ को $a+ib$ के रूप में व्यक्त कीजिए |

Q15. $\left(\frac{1}{3}+3i\right)^3$ को $a+ib$ के रूप में व्यक्त कीजिए |

Q16. $\left(-2-\frac{1}{3}i\right)^3$ को $a+ib$ के रूप में व्यक्त कीजिए |

Q17. $(5-3i)^3$ को $a+ib$ के रूप में व्यक्त कीजिए |

Q18. $\left[i^{18}+\left(\frac{1}{i}\right)^{25}\right]^3$ का मान ज्ञात कीजिए |

Q19. $\left(\frac{1}{1-4i}-\frac{2}{1+i}\right)\left(\frac{3-4i}{5+i}\right)$ को मानक रूप में परिवर्तित कीजिए |

Q20. सम्मिश्र संख्या $\frac{1+i}{1-i}-\frac{1-i}{1+i}$ का मापांक ज्ञात कीजिए |

Q21. समीकरण $x^2+x+\frac{1}{\sqrt{2}}=0$ को हल कीजिए |

Q22. समीकरण $x^2+\frac{x}{\sqrt{2}}+1=0$ को हल कीजिए |

Q23. समीकरण $3x^2-4x+\frac{20}{3}=0$ को हल कीजिए |

Q24. समीकरण $x^2-2x+\frac{3}{2}=0$ को हल कीजिए |

Q25. समीकरण $27x^2 - 10x + 1 = 0$ को हल कीजिए |

Q26. समीकरण $21x^2 - 28x + 10 = 0$ को हल कीजिए |

Q27. समीकरण $x^2 + x + 1 = 0$ को हल कीजिए |

Q28. समीकरण $2x^2 + x + 1 = 0$ को हल कीजिए |

Q29. समीकरण $x^2 + 3x + 9 = 0$ को हल कीजिए |

Q30. समीकरण $-x^2 + x - 2 = 0$ को हल कीजिए |

Q31. समीकरण $\sqrt{5}x^2 + x + \sqrt{5} = 0$ को हल कीजिए |

Q32. समीकरण $x^2 + 3x + 5 = 0$ को हल कीजिए |

Q33. समीकरण $x^2 - x + 2 = 0$ को हल कीजिए |

Q34. समीकरण $\sqrt{2}x^2 + x + \sqrt{2} = 0$ को हल कीजिए |

Q35. समीकरण $\sqrt{3}x^2 - \sqrt{2}x + 3\sqrt{3} = 0$ को हल कीजिए |

Q36. समीकरण $\dfrac{(3-2i)(2+3i)}{(1+2i)(2-i)}$ का संयुग्मी ज्ञात कीजिए |

Q37. समीकरण $\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^m = 1$ में m का न्यूनतम मान ज्ञात कीजिए |

Q38. यदि $x + iy = \dfrac{a+ib}{a-ib}$ है तो, सिद्ध कीजिए कि $x^2 + y^2 = 1$.

Q39. यदि α और β भिन्न सम्मिश्र संख्याएँ हैं, जहाँ $|\beta| = 1$, तब $\left|\dfrac{\beta-\alpha}{1-\overline{\alpha}\beta}\right|$ का मान ज्ञात कीजिए |

Q40. यदि $4x + i(3x - y) = 3 + i(-6)$, जहाँ x और y वास्तविक संख्याएँ हैं, तब x और y ज्ञात कीजिए |

Q41. $(-5i)\left(\dfrac{1}{8}i\right)$ को $a + ib$ के रूप में व्यक्त कीजिए |

Q42. $(5i)\left(-\dfrac{3}{5}i\right)$ को $a + ib$ के रूप में व्यक्त कीजिए |

Q43. $i^9 + i^{19}$ को $a + ib$ के रूप में व्यक्त कीजिए |

Q44. $\left[\left(\dfrac{1}{3} + i\dfrac{7}{3}\right) + \left(4 + i\dfrac{1}{3}\right) - \left(-\dfrac{4}{3} + i\right)\right]$ को $a + ib$ के रूप में व्यक्त कीजिए |

Q45. सम्मिश्र संख्या $\dfrac{1+i}{1-i}$ का मापांक ज्ञात कीजिए |

Q46. सम्मिश्र संख्या $\dfrac{1}{1+i}$ का मापांक ज्ञात कीजिए |

Q47. θ का वास्तविक मान बताइए, जबकि $\dfrac{3+2i\sin\theta}{1-2i\sin\theta}$ मात्र वास्तविक है |

Q48. किन्ही दो सम्मिश्र संख्याओं z_1 और z_2 के लिए, सिद्ध कीजिए:
$\text{Re}(z_1 z_2) = \text{Re}\, z_1 \,\text{Re}\, z_2 - \text{Im}\, z_1 \,\text{Im}\, z_2$.

Q49. यदि $x - iy = \sqrt{\dfrac{a-ib}{c-id}}$, तो सिद्ध कीजिए कि $(x^2 + y^2)^2 = \dfrac{a^2+b^2}{c^2+d^2}$.

Q50. यदि $z_1 = 2 - i, z_2 = 1 + i$, $\left|\dfrac{z_1+z_2+1}{z_1-z_2+i}\right|$ का मान ज्ञात कीजिए |

Q51. यदि $a+ib=\frac{(x+i)^2}{2x^2+1}$, तो सिद्ध कीजिए कि $a^2+b^2=\frac{(x^2+1)^2}{(2x^2+1)^2}$.

Q52. यदि $z_1=2-i, z_2=-2+i$, $\text{Re}\left(\frac{z_1z_2}{\overline{z_1}}\right)$ का मान ज्ञात कीजिए |

Q53. यदि $z=2-i$, $\text{Im}\left(\frac{1}{z\overline{z}}\right)$ का मान ज्ञात कीजिए |

Q54. यदि $(x-iy)(3+5i)$, $-6-24i$ की संयुग्मी है तो वास्तविक संख्याएँ x और y ज्ञात कीजिए |

Q55. यदि $(x+iy)^3=u+iv$, तो सिद्ध कीजिए कि $\frac{u}{x}+\frac{v}{y}=4(x^2-y^2)$.

Q56. समीकरण $|1-i|^x=2^x$ के शून्येत्तर पूर्णांक मूलों की संख्या ज्ञात कीजिए |

....

उत्तरमाला
(वस्तुनिष्ठ प्रश्न)

A1.	1. (a) $\frac{3}{4}$ और $\frac{33}{4}$	2. (b) 1	3. (d) $3+4i$	4. (a) $\frac{2}{13}+\frac{3}{13}i$	
A2.	1. 2	2. 1	3. i	4. $-2+i$	5. i
A3.	1. सत्य	2. सत्य	3. सत्य	4. सत्य	5. सत्य
A4.	1. i	2. $0+i$	3. $a-ib$		

....

अध्याय 6: रैखिक असमिकाएँ

स्मरणीय बिंदु

- एक असमिका, दो वास्तविक संख्याओं या दो बीजीय व्यंजकों में <, >, ≤, या ≥ के चिन्ह के प्रयोग से बनती हैं | $3<5$, $7>4$ इत्यादि संख्यांक असमिका के उदाहरण हैं | $x<5$, $7>y$, $x+y\geq 51$ इत्यादि शाब्दिक (चरांक) असमिका के उदाहरण हैं |
- एक असमिका $15x<50$ पर विचार करते हैं , जहाँ x कोई पूर्ण संख्या है | इस असमिका को सत्य कथन करने वाले x के मान केवल 0, 1, 2, 3 हैं जबकि यदि x के स्थान पर 4 लिया जाए तो असमिका एक असत्य कथन हो जाती है | x के वे मान जो असमिका को एक सत्य कथन बनाते हैं , असमिका के हल कहलाते हैं |
- एक असमिका के दोनों पक्षों में समान संख्या जोड़ी या घटायी जा सकती है |
- किसी असमिका के दोनों पक्षों को समान धनात्मक संख्या से गुणा (या भाग) किया जा सकता है | परंतु दोनों पक्षों को समान ऋणात्मक संख्या से गुणा (या भाग) करने पर असमिका के चिन्ह तदनुसार बदल जाते हैं |

Q1. रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए:

1. x के उन मानों को जो दिए गए असमिका को एक सत्य कथन बनाते हैं, उन्हें असमिका का .... कहते हैं |
2. $ax+by\leq c$ एक रैखिक .... है |

Q2. सत्य / असत्य लिखिए :

1. $ax + by \le c$ एक रैखिक असमिका है |

2. $ax + by < c$ एक सुनिश्चित असमिका है |

Q3. $30x < 200$ का हल ज्ञात कीजिए जब

(i) x एक प्राकृत संख्या है | (ii) x एक पूर्णांक है |

Q4. $24x < 100$, का हल ज्ञात कीजिए जब

(i) x एक प्राकृत संख्या है | (ii) x एक पूर्णांक है |

Q5. हल कीजिए: $5x - 3 < 3x + 1$, जब

(i) x एक पूर्णांक है | (ii) x एक वास्तविक संख्या है |

Q6. हल कीजिए: $-12x > 30$, जब

(i) x एक प्राकृत संख्या है | (ii) x एक पूर्णांक है |

Q7. हल कीजिए: $3x + 8 > 2$, जब

(i) x एक पूर्णांक है | (ii) x एक वास्तविक संख्या है |

Q8. हल कीजिए: $4x + 3 < 6x + 7$.

Q9. हल कीजिए: $3x - 7 > 5x - 1$.

Q10. हल कीजिए: $3(x-1) \le 2(x-3)$.

Q11. हल कीजिए: $3(2-x) \ge 2(1-x)$.

Q12. हल कीजिए: $x + \frac{x}{2} + \frac{x}{3} < 11$.

Q13. हल कीजिए: $\frac{x}{3} > \frac{x}{2} + 1$.

Q14. हल कीजिए: $\frac{3(x-2)}{5} \le \frac{5(2-x)}{3}$.

Q15. हल कीजिए: $-8 \le 5x - 3 < 7$.

Q16. हल कीजिए: $\frac{5-2x}{3} \le \frac{x}{6} - 5$.

Q17. वास्तविक संख्या x के लिए हल कीजिए: $\frac{x}{4} < \frac{(5x-2)}{3} - \frac{(7x-3)}{5}$.

Q18. हल कीजिए $\frac{3x-4}{2} \ge \frac{x+1}{4} - 1$ तथा इस हल को संख्या रेखा पर आलेखित कीजिए |

Q19. हल कीजिए $\frac{x}{2} \ge \frac{(5x-2)}{3} - \frac{(7x-3)}{5}$ तथा इस हल को संख्या रेखा पर आलेखित कीजिए |

Q20. हल कीजिए $7x + 3 < 5x + 9$ तथा इस हल को संख्या रेखा पर आलेखित कीजिए |

Q21. कक्षा XI के प्रथम सत्र व द्वितीय सत्र की परीक्षाओं में एक छात्र के प्राप्तांक 62 और 48 हैं | वह न्यूनतम अंक ज्ञात कीजिए, जिसे वार्षिक परीक्षा में पाकर वह छात्र 60 अंक का न्यूनतम औसत प्राप्त कर सके |

Q22. रवि ने पहली दो एकक परीक्षा में 70 और 75 अंक प्राप्त किए हैं | वह न्यूनतम अंक ज्ञात कीजिए जिसे वह तीसरी एकक परीक्षा में पाकर 60 अंक का न्यूनतम औसत प्राप्त कर सके |

Q23. किसी पाठ्यक्रम में ग्रेड 'A' पाने के लिए एक व्यक्ति को सभी पाँच परीक्षाओं (प्रत्येक 100 में से) में 90 अंक

या अधिक अंक का औसत प्राप्त करना चाहिए | यदि सुनीता के प्रथम चार परीक्षाओं के प्राप्तांक 87, 92, 94 और 95 हों तो वह न्यूनतम अंक ज्ञात कीजिए जिसे पाँचवी परीक्षा में प्राप्त करके सुनीता उस पाठ्यक्रम में ग्रेड 'A' पाएगी |

Q24. क्रमागत विषम संख्याओं के ऐसे युग्म ज्ञात कीजिए, जिनमें दोनों संख्याएँ 10 से बड़ी हों, और उनका योगफल 40 से कम हो |

Q25. 10 से कम क्रमागत विषम संख्याओं के ऐसे युग्म ज्ञात कीजिए, जिनके योगफल 11 से अधिक हों |

Q26. क्रमागत सम संख्याओं के ऐसे युग्म ज्ञात कीजिए, जिनमें से प्रत्येक 5 से बड़े हों, तथा उनका योगफल 23 से कम हो |

Q27. एक विलयन को $68^\circ F$ और $77^\circ\ F$ के मध्य रखना है | सेल्सियस पैमाने पर विलयन के तापमान का परिसर ज्ञात कीजिए , जहाँ सेल्सियस फारेनहाइट परिवर्तन सूत्र $F = \frac{9}{5}C + 32$ है |

Q28. एक व्यक्ति के बौद्धिक – लब्धि (IQ) मापन सूत्र निम्नलिखित है: $IQ = \frac{MA}{CA} \times 100$,

जहाँ MA मानसिक आयु और CA कालानुक्रमी आयु है | यदि 12 वर्ष की आयु के बच्चों के एक समूह की IQ, असमिका $80 \le IQ \le 140$ द्वारा व्यक्त हो, तो उस समूह के बच्चों की मानसिक आयु का परिसर ज्ञात कीजिए |

....

उत्तरमाला
(वस्तुनिष्ठ प्रश्न)

A1. 1. हल 2. असमिका

A2. 1. सत्य 2. सत्य

....

अध्याय 7: क्रमचय एवं संचय

स्मरणीय बिंदु:-

- यदि किसी कार्य A को m तरीके से तथा कार्य B को n तरीके से किया जा सकता है, और C एक कार्य है जो A तथा B के होने के बाद सम्पादित होता है तब C कार्य को करने के $m \times n$ तरीके हैं।
- यदि तीन संक्रियाएँ पृथक- पृथक क्रमशः m, n और p विधियों से संपन्न हो रही हैं तो तीनो संक्रियाओं को एक साथ $m \times n \times p$ विधियों से संपन्न किया जा सकता है ।
- प्रथम प्राकृत संख्याओं के गुणा में लिखने को क्रमगुणित कहा जाता है और इसे n! या Ln से प्रदर्शित किया जाता है।

  अर्थात $n! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times ----\times (n-1) \times n$

  $3! = 1 \times 2 \times 3 = 6$

  $5! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 = 120$ आदि
- n! केवल धनात्मक पूर्णांकों के लिए परिभाषित है।
- क्रमचय एक निश्चित क्रम विन्यास है, जिसको दी हुयी वस्तुओं में से एक समय में कुछ या सभी को लेकर बनाया गया है। अक्षरों A, B, C से बनने वाले भिन्न क्रमचय, जबकि दो अक्षर एक साथ लिए जाए, AB, BA, BC, CB, AC, CA होंगे|

- n भिन्न वस्तुओं में से एक समय में r वस्तुओं को लेकर बनाये गए क्रमचयो की संख्या ^nP_r इसे P (n, r) से प्रदर्शित की जाती है।
- n भिन्न वस्तुओं में से एक समय में r वस्तुओं को लेकर बनाये गए क्रमचयो की संख्या को प्रतीक ^nP_r से निरुपित करते हैं, जहाँ 0 < r ≤ n तथा किसी भी क्रमचय में वस्तुओं की पुनरावृत्ति की अनुमति नहीं है।
  ^nP_r = n(n-1)(n-2)----------(n-r+1) = $\frac{n!}{(n-r)!}$
- n भिन्न वस्तुओं में से एक समय में से सभी वस्तुओं को लेकर बनाए गये क्रमचयों की संख्या
  P(n , n) = ^nP_n = n!
- जब $r > n$, हम ^nP_r के बारे में नहीं सोचते , क्योंकि कम वस्तुओं में से अधिक वस्तुओं को लेकर व्यवस्थित नहीं किया जा सकता है | साथ ही $^nP_r = \frac{n!}{(n-r)!}$ का कोई अर्थ नहीं है, जब $r > n$ अर्थात $(n - r) < 0$ क्योंकि ऋणात्मक संख्या का क्रमगुणित परिभाषित नहीं है |
- $^nP_0 = \frac{n!}{(n-0)!} = \frac{n!}{n!} = 1$, इस प्रकार n भिन्न वस्तुओं में से कोई भी वस्तु न लेकर बने क्रमचयो की संख्या 1 है |
  अतः r = 0 के लिए –
  $^nP_r = \frac{n!}{(n-r)!}$, $0 \le r < n$
- कुछ या सभी वस्तुओं को लेकर प्राप्त किया गया चयन संचय कहलाता है।
  अक्षरों A,B,C से बनने वाले भिन्न संचय, जबकि दो अक्षर एक साथ लिए जाए, AB, BC, AC होंगे।
- r वस्तुओं को एक साथ लेते हुए n वस्तुओं के संचयो की संख्या C (n,r) या ^nC_r या $\binom{n}{r}$ से प्रदर्शित किया जाता है |
  इस प्रकार, ^nC_r या C (n,r) = n वस्तुओं में से r वस्तुओं के चयन की विधि |
- n भिन्न वस्तुओं में से r एक साथ लेते हुए संचयो की संख्या $^nC_r = \frac{n!}{(n-r)!r!}$, $0 \le r \le n$
- माना n और r ऋणेत्तर पूर्णांक इस प्रकार हैं कि –
  r ≤ n तब $^nC_r + {}^nC_{r-1} = {}^{n+1}C_r$

- $^nP_r = {}^nC_r$ r! , $0 \le r \le n$
- $^nC_n = \frac{n!}{n!0!} = 1$
- $^nC_0 = 1$
- n विभिन्न वस्तुओं में से एक समय में r को लेकर बनने वाले क्रमचयो कि संख्या, जबकि पुनरावृत्ति की अनुमति है; n^r है |
- संचय में केवल चयन करते है , जबकि क्रमचय में न केवल चयन करते हैं बल्कि एक निश्चित क्रम में व्यवस्थित किया जाता है।
- संचय में चुनी हुयी वस्तुओं का क्रम महत्वपूर्ण नहीं है | जबकि क्रमचय में, क्रम महत्वपूर्ण है| उदाहरण के लिए, A, B और B, A संचय में समान है, लेकिन क्रमचय में भिन्न हैं |
- r वस्तुएँ एक साथ लेते हुए, n भिन्न वस्तुओं के क्रमचय प्राप्त करने हेतु सर्वप्रथम हम n वस्तुओं में से r वस्तुओं को चुनते हैं, और फिर उन्हें व्यवस्थित करते हैं अतः क्रमचयो की संख्या संचयो की संख्या से अधिक होती है |
- कई क्रमचयों के संगत एक संचय होती है उदाहरण के लिए छः क्रमचय ABC, ACB, BCA, BAC, CBA

और CAB समान संचय ABC के संगत |

- व्यापक रूप में हम शब्द arrangement's का प्रयोग क्रमचय और selections का प्रयोग संचय के लिए करते है।

Q1. सही विकल्प चुनिये:

1. $^{12}P_2$ का मान होगा:

   (a) 132 (b) 1320 (c) 12 (d) 11880

2. $^{n}P_0$ का मान होगा:

   (a) 0 (b) 1 (c) 2 (d) n

3. $^{n}P_n$ का मान होगा:

   (a) 0 (b) 1 (c) 2 (d) $n!$

4. $0!$ का मान होगा:

   (a) 0 (b) 1 (c) 2 (d) n

5. $^{n}C_0$ का मान होगा:

   (a) 0 (b) 1 (c) 2 (d) n

6. $^{n}C_n$ का मान होगा:

   (a) 0 (b) 1 (c) 2 (d) n

7. अंको 1,2,3,4,5 से कितनी 2 अंकीय संख्याएं बन सकती है, यदि अंको क़ी पुनरावृत्ति क़ी जा सकती है।

   (a) 25 (b) 10 (c) 16 (d) 20

8. 5! का मान होगा:

   (a) 5 (b) 120 (c) 16 (d) 20

9. यदि $5\ {}^{4}P_r = 6\ {}^{5}P_{r-1,}$ है तो r का मान होगा:

   (a) 3 (b) 8 (c) 4 (d) 5

10. $^{n}C_r$ का मान है-

    (a) $\frac{n!}{(n-r)!}$ (b) $\frac{(n-r)!}{r!n!}$ (c) $\frac{n!}{r!(n-r)!}$ (d) इनमे से कोई नहीं

11. $^{10}C_r = {}^{10}C_{r+4}$ तो r का मान होगा-

    (a) 3 (b) 8 (c) 4 (d) 5

12. यदि (n+2)! = 20n! है तो n का मान होगा-

    (a) - 6 (b) 3 (c) 6 (d) 5

13. $^{n}C_r + {}^{n}C_{r-1}$ का मान होगा

    (a) $^{n}C_{r-1}$ (b) $^{n+1}C_r$ (c) $^{n}C_r$ (d) $^{n+1}C_{r+1}$

Q2. रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए:

1. यदि $^{n}C_{12} = {}^{n}C_8$ तो $n = \dots\dots\dots$
2. $0! = \dots\dots\dots$

3. $\frac{7!}{5!}$ = ...

4. n भिन्न वस्तुओं में से सभी वस्तुओं को लेकर बनाये गए क्रमचयो की संख्या .... होगी।

5. n भिन्न वस्तुओं में से कोई भी वस्तु न लेकर बने क्रमचयो की संख्या .... है।

6. n भिन्न वस्तुओं में से r वस्तुओं को लेकर बनाये गए क्रमचयो की संख्या .... से प्रदर्शित की जाती है |

7. n विभिन्न वस्तुओं में से एक समय में, r वस्तुओं को लेकर बने क्रमचयो की संख्या, जबकि वस्तुओं के पुनरावृत्ति की अनुमति हो, ... होती है।

8. ${}^{n}C_{9}$ = ${}^{n}C_{8}$ है तो ${}^{n}C_{17}$ का मान ....होगा।

9. n विभिन्न वस्तुओं में से एक समय में r वस्तुओं को लेकर बनने वाले संचयो की संख्या को .... से प्रकट करते है।

10. ${}^{5}P_{5}$ का मान .... है |

11. ${}^{n+1}C_{3}$ = 2 ${}^{n}C_{2}$ हो, तो n का मान .... होगा |

12. (7! -5!) का मान ....है |

Q3. सत्य / असत्य लिखिए :

1. 0! का मान 0 होता है |

2. ${}^{5}C_{2}$ का मान 20 होता है |

3. क्रमचय एक निश्चित क्रम में बना विन्यास है, जिसको दी हुई वस्तुओं में से एक समय में कुछ या सभी को लेकर बनाया गया है।

4. n विभिन्न वस्तुओं में से एक समय में r वस्तुओं को लेकर बनाये क्रमचयो की संख्या को प्रतीक ${}^{n}P_{r}$ से निरूपित करते है।

5. 3! + 4! का मान 7! होगा |

6. 7! का मान 4050 है |

7. n विभिन्न वस्तुओं में से एक समय में r वस्तुओं को लेकर बने क्रमचयो की संख्या जबकि वस्तुओं की पुनरावृत्ति की अनुमति हो, n^r होती है |

8. ${}^{n}P_{n}$ = n! होता है |

9. ${}^{n}C_{r}$+ ${}^{n}C_{r-1}$ = ${}^{n+1}C_{r}$ होता है|

10. यदि ${}^{n}C_{9}$ = ${}^{n}C_{8}$ हो, तो ${}^{n}C_{17}$ का मान 10 होगा।

Q4. एक शब्द या वाक्य में उत्तर लिखिए:

1. 5 ! का मान लिखिए |

2. 7 ! का मान लिखिए |

3. 4!−3 ! का मान लिखिए |

4. ${}^{5}C_{2}$ का मान लिखिए |

5. ${}^{9}P_{3}$ का मान लिखिए |

6. क्रमचय की परिभाषा लिखिए।

7. संचय की परिभाषा लिखिए।

8. क्रमचय तथा संचय के बीच क्या सम्बन्ध है?

9. $\frac{n!}{(n-r)!}$ का मान निकालिये जब n=9, r=5 |

10. MATHEMATICS शब्द के अक्षरों से बने क्रमचयो की संख्या कितनी है?

11. REWA शब्द के अक्षरों से बनने वाले क्रमचयो की संख्या ज्ञात कीजिये|

Q5. सही जोड़ी मिलाइए:

स्तम्भ – A	स्तम्भ - B
1. $5!$	a. $n.(n-1)!$
2. ${}^5C_2$	b. 1
3. ${}^nP_0$	c. 18
4. $4!-3!$	d. 10
5. $n!$	e. 120

Q6. ${}^nC_8$ = ${}^nC_2$ तो ${}^nC_2$ का मान ज्ञात कीजिये |

Q7. यदि ${}^{10}P_r$ = 5040, हो, तो r का मान ज्ञात कीजिये।

Q8. ${}^{18}C_r$ = ${}^{18}C_{r+2}$ हो, तो ${}^rC_5$ का मान कितना होगा |

Q9. $\frac{1}{6!}+\frac{1}{7!}=\frac{x}{8!}$ हो, तो x का मान ज्ञात कीजिये|

Q10. ELEPHANT शब्द के अक्षरों से बनने वाले क्रमचयो की संख्या लिखिए|

Q11. शब्द ROSE के अक्षरों से बनने वाले 4 अक्षरों वाले, अर्थपूर्ण या अर्थहीन, शब्दों की संख्या ज्ञात कीजिए , जबकि अक्षरों की पुनराव्रत्ति की अनुमति नहीं हैं |

Q12. भिन्न – भिन्न रंगों के दिए हुए 4 झंडों से, कितने भिन्न – भिन्न संकेत उत्पन्न किए जा सकते हैं, यदि एक संकेत के लिए एक दूसरे के नीचे 2 झंडों की आवश्यकता पड़ती है?

Q13. अंकों 1, 2, 3, 4 और 5 से कितनी 3 अंकीय संख्याएँ बनाई जा सकती हैं, यदि अंकों की पुनरावृत्ति की अनुमति न हो?

Q14. 1 से 9 तक के अंकों को प्रयोग करके कितनी 4 अंकीय संख्याएँ बन सकती हैं, यदि अंकों की पुनरावृत्ति अनुमति नहीं हैं?

Q15. मान निकालिए $\frac{n!}{r!(n-r)!}$, जहाँ $n=5, r=2$.

Q16. यदि $\frac{1}{8!}+\frac{1}{9!}=\frac{x}{10!}$ तो x ज्ञात कीजिए |

Q17. ALLAHABAD शब्द के अक्षरों से बनने वाले क्रमचयों की संख्या ज्ञात कीजिए |

Q18. n का मान ज्ञात कीजिए यदि ${}^nP_5 = 42\, {}^np_3,\, n>4$.

Q19. यदि ${}^nC_9={}^nC_8$ तो ${}^nC_{17}$ मान ज्ञात कीजिए |

Q20. किसी वृत पर स्थित 21 बिन्दुओं से होकर जाने वाली कितनी जीवाएँ खींची जा सकती हैं?

Q21. सिद्ध कीजिये कि ${}^n\mathrm{C}_\mathrm{r}$ + ${}^n\mathrm{C}_{\mathrm{r}-1}$ = ${}^{n+1}\mathrm{C}_\mathrm{r}$.

Q22. DAUGHTER शब्द के अक्षरों से 8 अक्षर वाले विन्यासों की संख्या ज्ञात कीजिये यदि सभी स्वर एक साथ रहें|

Q23. n का मान ज्ञात कीजिये ${}^{2n}C_3 : {}^{n}C_3 = 11:1$

Q24. शब्द INDEPENDENCE के अक्षरों को कितनी विधियों से व्यवस्थित किया जा सकता है, यदि शब्द P से आरम्भ हो।

Q25. EQUATION शब्द के अक्षरों में से प्रत्येक को तथ्यत: केवल एक बार उपयोग करके कितने अर्थपूर्ण या अर्थहीन, शब्द बन सकते हैं?

Q26. 8 व्यक्तियों की समिति में, हम कितने प्रकार से एक अध्यक्ष और एक उपाध्यक्ष चुन सकते हैं, यह मानते हुए कि एक व्यक्ति एक से अधिक पद पर नहीं रह सकता है?

Q27. अँग्रेजी वर्णमाला के प्रथम 10 अक्षरों से कितने 4 अक्षर के कोड बनाए जा सकते हैं ,यदि किसी भी अक्षर की पुनरावृत्ति नहीं की जा सकती है?

Q28. 0 से 9 तक के अंकों का प्रयोग करके कितने 5 अंकीय टेलीफोन नंबर बनाए जा सकते हैं, यदि प्रत्येक नंबर 67 से प्रारम्भ होता है और कोई अंक एक बार से अधिक नहीं आता है?

Q29. अंकों 1, 2, 3, 4, और 5 के उपयोग द्वारा कितनी 4 अंकीय संख्याएँ बनाई जा सकती हैं, यदि कोई भी अंक दोहराया नहीं गया है? इनमें से कितनी सम संख्याएँ होंगी?

Q30. किसी भी अंक को दोहराए बिना कितनी 4 अंकीय संख्याएँ होती हैं?

Q31. 100 और 1000 के बीच स्थित कितनी संख्याएँ हैं, जिन्हें अंक 0, 1, 2, 3, 4, 5 से बनाया जा सकता है , यदि अंकों के पुनरावृत्ति की अनुमति नहीं है|

Q32. अंकों 1, 2, 3, 4 और 5 से कितनी 3 अंकीय संख्याएँ बनाई जा सकती हैं, यदि अंकों की पुनरावृत्ति की जा सकती है |

Q33. अंकों 1, 2, 3, 4, 5, 6 से कितनी 3 अंकीय सम संख्याएँ बन सकती हैं, यदि अंकों की पुनरावृत्ति की जा सकती है |

Q34. 4 लाल, 3 पीली तथा 2 हरी डिस्कों को एक पंक्ति में कितने प्रकार से व्यवस्थित किया जा सकता है, यदि एक ही रंग की डिस्कों में कोई अंतर नहीं है ?

Q35. यदि ${}^{n-1}P_3 : {}^{n}P_4 = 1:9$ तो n का मान ज्ञात कीजिए |

Q36. r का मान ज्ञात कीजिए यदि $5\ {}^{4}P_r = 6\ {}^{5}P_{r-1}$.

Q37. n का मान ज्ञात कीजिए यदि ${}^{2n}C_3 : {}^{n}C_2 = 12:1$.

Q38. 2 पुरुषों और 3 महिलाओं के एक समूह से 3 व्यक्तियों की एक समिति बनानी है | यह कितने प्रकार से किया जा सकता है? इनमें से कितनी समितियाँ ऐसी हैं, जिनमें 1 पुरुष तथा 2 महिलाएँ हैं?

Q39. 5 लड़के और 4 लड़कियों में से 3 लड़के और 3 लड़कियों की टीमें बनाने के कितने तरीके हैं?

Q40. 6 लाल रंग की, 5 सफ़ेद रंग की और 5 नीले रंग की गेंदों में से 9 गेंदों के चुनने के तरीकों की संख्या ज्ञात कीजिए , यदि प्रत्येक संग्रह में प्रत्येक रंग की 3 गेंदें हैं |

Q41. 52 पत्तों की एक गड्डी में से 5 पत्तों को लेकर बनने वाले संचयों की संख्या निर्धारित कीजिए, यदि प्रत्येक संचय में तथ्यत: एक इक्का है |

Q42. एक थैली में 5 काली तथा 6 लाल गेंद हैं | 2 काली तथा 3 लाल गेंदों के चयन के तरीकों की संख्या निर्धारित कीजिए |

Q43. PERMUTATIONS शब्द के अक्षरों को कितने तरीकों से व्यवस्थित किया जा सकता है:

(i) चयनित शब्द का प्रारम्भ P से तथा अंत S से होता है।

(ii) चयनित शब्द में सभी स्वर एक साथ है।

(iii) चयनित शब्द में P तथा S के मध्य सदैव 4 अक्षर हो।

Q44. MONDAY शब्द के अक्षरों में से कितने अर्थपूर्ण या अर्थहीन शब्द बन सकते हैं, यह मानते हुए कि किसी भी अक्षर की पुनरावृत्ति नहीं कि जाती है; यदि

(i) एक समय में 4 अक्षर लिए जाते हैं।

(ii) सभी अक्षरों का प्रयोग किया जाता है किन्तु प्रथम अक्षर एक स्वर है|

Q45. 52 ताशो कि गड्डी में 4 पत्तों को चुनने के तरीको की संख्या क्या है; इन तरीको में से कितनों में -

(i) चार पत्ते एक ही प्रकार के है?

(ii) दो लाल रंग के, दो काले रंग के है?

Q46. 1, 2, 0, 2, 4, 2, 4 अंको के प्रयोग द्वारा 1000000 से बड़ी कितना संख्याये बन सकती हैं।

Q47. 5 लड़कियाँ और 3 लड़कों को एक पंक्ति में कितने प्रकार से बैठा सकते हैं जबकि कोई भी दो लड़के एक साथ नहीं बैठते हैं |

Q48. ASSASSINATION शब्द के अक्षरों के कितने विन्यास बनाये जा सकते हैं जबकि सभी 'S' एक साथ रहें।

Q49. अंग्रेजी वर्णमाला में 5 स्वर और 21 व्यंजन हैं। इस वर्णमाला से भिन्न स्वरों और भिन्न व्यंजनों वाले कितने शब्दों की रचना की जा सकती है।

Q50. 9 उपलब्ध पाठ्यक्रमों में से, एक विद्यार्थी 5 पाठ्यक्रमों का चयन कितने प्रकार से कर सकता है, यदि प्रत्येक विद्यार्थी के लिए 2 विशिष्ट पाठ्यक्रम अनिवार्य हैं?

Q51. 17 खिलाड़ियों में से, जिनमें केवल 5 खिलाड़ी गेंदबाजी कर सकते हैं, एक क्रिकेट टीम के 11 खिलाड़ियों का चयन कितने प्रकार से किया जा सकता है, यदि प्रत्येक टीम में तथ्यत: 4 गेंदबाज हैं?

उत्तरमाला
(वस्तुनिष्ठ प्रश्न)

A1. 1. (a) 132 2. (b) 1 3. (d) $n!$ 4. (b) 1 5. (b) 1 6. (b) 1 7. (a) 25 8. (b)120

9. (a) 3 10. (c) $\frac{n!}{r!\,(n-r)!}$ 11. (a) 3 12. (b)3 13. (b) ${}^{n+1}c_r$

A2. 1. 20 2. 1 3. 42 4. $n!$ 5. 1 6. ${}^{n}p_r$

7. n^r 8. 1 9. ${}^{n}c_r$ 10. 120 11. 5 12. 4920

A3. 1. असत्य 2. असत्य 3. सत्य 4. सत्य 5. असत्य 6. असत्य

7. सत्य 8. सत्य 9. सत्य 10. असत्य

A4.

1. $5! = 5\times4\times3\times2\times1 = 120$
2. $7! = 7\times6\times5\times4\times3\times2\times1 = 5040$
3. $4! - 3! = 4\times3\times2\times1 - 3\times2\times1 = 24 - 6 = 18$
4. ${}^{5}C_2 = \frac{5\times4}{2\times1} = 10$
5. ${}^{9}P_3 = 9\times8\times7 = 504$

6. क्रमचय एक निश्चित क्रम विन्यास है, जिसको दी हुयी वस्तुओं में से एक समय में कुछ या सभी को लेकर बनाया गया है। अक्षरों A, B, C से बनने वाले भिन्न क्रमचय, जबकि दो अक्षर एक साथ लिए जाए, AB, BA, BC, CB, AC, CA होंगे|
7. कुछ या सभी वस्तुओं को लेकर प्राप्त किया गया चयन संचय कहलाता है। अक्षरों A,B,C से बनने वाले भिन्न संचय, जबकि दो अक्षर एक साथ लिए जाए, AB, BC, AC होंगे
8. ${}^{n}p_{r} = {}^{n}c_{r} . r!\ ,\ 0 < r \le n.$
9. 15120
10. 4989600
11. 24

A5. (1).↔ (e), (2).↔ (d), (3).↔ (b), (4).↔ (c), (5).↔ (a)

****

अध्याय 8: द्विपद प्रमेय

स्मरणीय बिन्दु

- $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
- द्विपद प्रमेय :
  $(a+b)^n = {}^nC_0 a^{n-0} b^0 + {}^nC_1 a^{n-1} b^1 + {}^nC_2 a^{n-2} b^2 + \ldots + {}^nC_n a^{n-n} b^n$
- द्विपद प्रमेय में आने वाले गुणांक ${}^nC_r$ को द्विपद गुणांक कहते हैं ।
- $(a+b)^n$ के प्रसार में पदों की संख्या $(n+1)$ है अर्थात घातांक से 1 अधिक है ।
- $(a+b)^n$ के प्रसार में प्रत्येक पद में a तथा b की घातांकों का योग n है ।
- ${}^nC_0 + {}^nC_1 + {}^nC_2 + \ldots + {}^nC_n = 2^n$
- ${}^nC_0 - {}^nC_1 + {}^nC_2 - \ldots + (-1)^n\ {}^nC_n = 0$

Q1. सही विकल्प चुनिये:

1. $(a+b)^n$ के प्रसार में कुल पदों की संख्या होगी:

   (a) n (b) $n+1$ (c) $n-1$ (d) $n+2$

Q2. रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए:

1. ${}^nC_0 + {}^nC_1 + {}^nC_2 + \ldots\ldots + {}^nC_n = \ldots\ldots\ldots$
2. ${}^nC_0 - {}^nC_1 + {}^nC_2 - \ldots + (-1)^n\ {}^nC_n = \ldots\ldots\ldots$

Q3. सत्य / असत्य लिखिए :

1. $(a+b)^n$ के प्रसार में प्रत्येक पद में a तथा b की घातांकों का योग n है|
2. द्विपद प्रमेय में आने वाले गुणांक ${}^nC_r$ को द्विपद गुणांक कहते हैं ।
3. $(a+b)^n$ के प्रसार में पदों की संख्या $(n+1)$ है अर्थात घातांक से 1 अधिक है ।

Q4. एक शब्द या वाक्य में उत्तर लिखिए:

1. द्विपद प्रमेय से $(a+b)^n$ का प्रसार लिखिए |
2. द्विपद प्रमेय से $(a-b)^n$ का प्रसार लिखिए |

Q5. $\left(x^2+\frac{3}{x}\right)^4$, $x \neq 0$ का प्रसार ज्ञात कीजिए |

Q6. $\left(\frac{x}{3}+\frac{1}{x}\right)^5$ का प्रसार ज्ञात कीजिए |

Q7. $\left(x+\frac{1}{x}\right)^6$ का प्रसार ज्ञात कीजिए |

Q8. $(1-2x)^5$ का प्रसार ज्ञात कीजिए |

Q9. $\left(\frac{2}{x}-\frac{x}{2}\right)^5$ का प्रसार ज्ञात कीजिए |

Q10. $(2x-3)^6$ का प्रसार ज्ञात कीजिए |

Q11. $(102)^5$ का मान ज्ञात कीजिए |

Q12. $(101)^4$ का मान ज्ञात कीजिए |

Q13. $(98)^5$ की गणना कीजिए |

Q14. $(96)^3$ का मान ज्ञात कीजिए |

Q15. $(99)^5$ का मान ज्ञात कीजिए |

Q16. $(1.01)^{1000000}$ और 10,000 में कौन सी संख्या बड़ी है |

Q17. द्विपद प्रमेय का प्रयोग करके बताइए कौन सी संख्या बड़ी है $(1.1)^{10000}$ या 1000 में कौन सी संख्या बड़ी है |

Q18. सिद्ध कीजिए कि $\sum_{r=0}^{n} 3^r \ {}^nC_r = 4^n$.

Q 19. $(a+b)^4-(a-b)^4$ का विस्तार कीजिए | इसका प्रयोग करके $(\sqrt{3}+\sqrt{2})^4-(\sqrt{3}-\sqrt{2})^4$ का मान ज्ञात कीजिए |

Q 20. $(x+1)^6+(x-1)^6$ का विस्तार कीजिए | इसका प्रयोग करके $(\sqrt{2}+1)^6+(\sqrt{2}-1)^6$ का मान ज्ञात कीजिए |

Q 21. द्विपद प्रमेय का प्रयोग करके सिद्ध कीजिए कि 6^n-5n को जब 25 से भाग दिया जाए तो सदैव 1 शेष बचता है |

Q 22. दिखाइए कि $9^{n+1}-8n-9$,64 से विभाज्य है जहाँ n एक धन पूर्णांक है |

....

उत्तरमाला (वस्तुनिष्ठ प्रश्न)

A1. 1. (b) $n+1$ 2. (a) 672

A2. 1. $\left(\frac{n}{2}+1\right)$ 2. 2^n 3. 0

A3. 1. सत्य 2. सत्य 3. सत्य

A4.

1. $(a+b)^n = {}^nC_0 a^{n-0} b^0 + {}^nC_1 a^{n-1} b^1 + {}^nC_2 a^{n-2} b^2 + \ldots + {}^nC_n a^{n-n} b^n$

2. $(a-b)^n = {}^nC_0 a^{n-0} b^0 - {}^nC_1 a^{n-1} b^1 + {}^nC_2 a^{n-2} b^2 + \ldots.. + (-1)^n \ {}^nC_n a^{n-n} b^n$

****

अध्याय 9: अनुक्रम तथा श्रेढ़ी

स्मरणीय बिन्दु

- समांतर श्रेढ़ी $a,\ a+d\ , a+2d\ ,...$ में

  $T_1 = a$,

  $T_2 = a+d$,

  $T_3 = a+2d$,

  $T_4 = a+3d$ इत्यादि ।

  जहाँ a प्रथम पद तथा d सार्व-अंतर है ।
- समांतर श्रेढ़ी $a,\ a+d\ , a+2d\ ,...$ का n वां पद

  $T_n = a+(n-1)d$

  जहाँ a प्रथम पद तथा d सार्व-अंतर है ।
- समांतर श्रेढ़ी $a,\ a+d\ , a+2d\ ,...$ में पदों की संख्या यदि n है तो अंतिम पद

  $l = a+(n-1)d$

  जहाँ a प्रथम पद तथा d सार्व-अंतर है ।
- समांतर श्रेढ़ी $a,\ a+d\ , a+2d\ ,...$ के n पदों का योग

  $$S_n = \frac{n}{2}\left[2a+(n-1)d\right]$$

  जहाँ a प्रथम पद तथा d सार्व-अंतर है ।
- समांतर श्रेढ़ी $a,\ a+d\ , a+2d\ ,...$ के n पदों का योग

  $$S_n = \frac{n}{2}\left[a+l\right]$$

  जहाँ a प्रथम पद तथा l अंतिम पद है ।
- संख्याओं a तथा b का समांतर माध्य $(A.M) = \dfrac{a+b}{2}$.

  गुणोत्तर श्रेढ़ी $a,\ ar,\ ar^2\ ,...$ में

  $T_1 = a$,

  $T_2 = ar$,

  $T_3 = ar^2$,

  $T_4 = ar^3$ इत्यादि ।

  जहाँ a प्रथम पद तथा r सार्व-अनुपात है ।
- गुणोत्तर श्रेढ़ी $a,\ ar,\ ar^2\ ,...$ का n वां पद

  $T_n = ar^{n-1}$

  जहाँ a प्रथम पद तथा r सार्व-अनुपात है ।
- गुणोत्तर श्रेढ़ी $a,\ ar,\ ar^2\ ,...$ में पदों की संख्या यदि n है तो अंतिम पद

  $l = ar^{n-1}$

  जहाँ a प्रथम पद तथा r सार्व-अनुपात है ।
- गुणोत्तर श्रेढ़ी $a,\ ar,\ ar^2\ ,...$ के n पदों का योग

  $$S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}, \quad r<1$$

  या

$$S_n = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1}, \quad r > 1$$

जहाँ a प्रथम पद तथा r सार्व–अनुपात है ।

- दो संख्याओं a तथा b का गुणोत्तर माध्य $\sqrt{ab}$ होता है ।
- A तथा G दो संख्याओं a तथा b के क्रमशः समांतर माध्य तथा गुणोत्तर माध्य हैं तो $A \geq G$ होता है।

Q1. सही विकल्प चुनिये:

1. श्रेढ़ी 2, 4, 8... का 8 वां पद होगा:

   (a) 64 (b) 128 (c) 256 (d) 512

2. श्रेढ़ी $a_n = n(n+2)$ का 5वां पद होगा:

   (a) 35 (b) 7 (c) 12 (d) 5

3. अनुक्रम $\sqrt{3}$, $\sqrt{12}$, $\sqrt{27}$ .... का 10 वाँ पद होगा?

   (a) $10\sqrt{3}$ (b) $3\sqrt{10}$ (c) $\sqrt{30}$ (d) $3\sqrt{3}$

4. यदि किसी समान्तर श्रेढ़ी के p वें पद का p गुना, उसी श्रेढ़ी के q वें पद के q गुना के बराबर हैं तो उसका (p + q) वां पद होगा:

   (a) p (b) q (c) p + q (d) 0

5. यदि किसी अनुक्रम का n वाँ पद an = $\frac{1}{2n-1}$ है, तो उस 5वाँ पद होगा?

   (a) $\frac{1}{5}$ (b) $\frac{1}{10}$ (c) $\frac{1}{9}$ (d) 9

6. अनुक्रम 1 + 2 + 3 + ...n का योगफल है :

   (a) $\frac{n(n-1)}{2}$ (b) $\frac{n}{2}$ (c) n^2 (d) $\frac{n(n+1)}{2}$

7. किसी कल्चर में बैक्टीरिया की संख्या प्रत्येक घंटे के पश्चात् दुगनी हो जाती है। यदि प्रारम्भ में उसमें 30 बैक्टीरिया उपस्थित हैं तो बैक्टीरिया की संख्या दूसरे घण्टे बाद होगी:

   (a) 20 (b) 120 (c) 480 (d) 60

Q2. रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए:

1. कोई दो धनात्मक वास्तविक संख्याओं a और b का गुणोत्तर माध्य .... होता है |
2. $\sqrt{2}$, $\sqrt{8}$, $\sqrt{18}$,... का 5 वां पद .... होगा |
3. अनुक्रम $(-1)^{n-1} 5^{n+1}$ का तीसरा पद .... है |
4. यदि a , A , b समान्तर श्रेणी में हों, तो संख्या A को a और b का .... कहते हैं |

Q3. सत्य / असत्य लिखिए :

1. दो संख्याओं a और b का समांतर माध्य $\frac{a-b}{2}$ होता है |
2. 4 और 12 का समांतर माध्य 6 होगा |
3. यदि किसी समांतर श्रेढ़ी के प्रत्येक पद में एक अचर से गुणा किया जाए तो, इस प्रकार प्राप्त अनुक्रम भी समांतर श्रेढ़ी होता है |
4. दो संख्याओं का समांतर माध्य, गुणोत्तर माध्य से छोटा होता है |
5. श्रेणी 5 , 25 , 125, ... का n वाँ पद 5^{n+1} है |

Q4. एक शब्द या वाक्य में उत्तर लिखिए:

1. गुणोत्तर श्रेढ़ी $a, ar, ar^2 \ldots$ का n वां पद लिखिए |
2. गुणोत्तर श्रेढ़ी $a, ar, ar^2 \ldots$ के n पदों का योग का सूत्र लिखिए |
3. समांतर श्रेणी $a,\, a+d,\, a+2d, \ldots\ldots\ldots.$ का n वां पद लिखिए |
4. समांतर श्रेणी $a,\, a+d,\, a+2d, \ldots\ldots\ldots.$ के n पदों का योग का सूत्र लिखिए |

Q5. यदि किसी अनुक्रम का n वां पद $a_n = n.\frac{n^2+5}{4}$ हो, तो उसका 10वाँ पद लिखिए |

Q6. अनुक्रम $a_n = (n-1)(2-n)(3+n)$ द्वारा परिभाषित अनुक्रम का 20वाँ पद क्या है?

Q7. यदि किसी समांतर श्रेणी के n पदों का योग $nP + \frac{1}{2}n(n-1)Q,$ है, जहाँ P तथा Q अचर हों तो सार्व-अंतर ज्ञात कीजिए |

Q8. माना कि a_n निम्नलिखित रूप में परिभाषित है :

$a_1 = 3$,

$a_n = 3a_{n-1} + 2$ सभी $n > 1.$

तो अनुक्रम के प्रथम पाँच पद ज्ञात कीजिए तथा संगत श्रेणी लिखिए |

Q9. माना कि a_n निम्नलिखित रूप में परिभाषित है :

$a_1 = 1$,

$a_n = a_{n-1} + 2$ जहाँ $n \geq 2.$

तो अनुक्रम के प्रथम पाँच पद ज्ञात कीजिए तथा संगत श्रेणी लिखिए |

Q10. माना कि a_n निम्नलिखित रूप में परिभाषित है :

$a_1 = -1$,

$a_n = \frac{a_{n-1}}{n}$ जहाँ $n \geq 2.$

तो अनुक्रम के प्रथम पाँच पद ज्ञात कीजिए तथा संगत श्रेणी लिखिए |

Q11. माना कि a_n निम्नलिखित रूप में परिभाषित है :

$a_1 = a_2 = 2$,

$a_n = a_{n-1} - 1$ जहाँ $n > 2.$

तो अनुक्रम के प्रथम पाँच पद ज्ञात कीजिए तथा संगत श्रेणी लिखिए |

Q12. यदि किसी समांतर श्रेढ़ी का m वां पद n तथा n वां पद m, जहाँ $m \neq n$ हो तो p वां पद ज्ञात कीजिए |

Q13. ऐसी 6 संख्याएँ ज्ञात कीजिए जिनको 3 और 24 के बीच रखने पर प्राप्त अनुक्रम एक समांतर श्रेणी बन जाए|

Q14. 1 से 2001 तक के विषम पूर्णांकों का योग ज्ञात कीजिए |

Q15. किसी समांतर श्रेढ़ी का p वाँ पद $\frac{1}{q}$ तथा q वाँ पद $\frac{1}{p}$, हो तो सिद्ध कीजिए कि प्रथम pq पदों का योग $\frac{1}{2}(pq+1)$ होगा, जहाँ $p \neq q.$

Q16. यदि किसी समांतर श्रेढ़ी के प्रथम p पदों का योग, प्रथम q पदों के योगफल के बराबर हो तो प्रथम $(p+q)$ पदों का योगफल ज्ञात कीजिए |

Q17. एक बहुभुज के दो क्रमिक अंत:कोणों का अंतर 5^0 है | यदि सबसे छोटा कोण 120^0 हो, तो बहुभुज की

भुजाओं की संख्या ज्ञात कीजिए |

Q18. एक गुणोत्तर श्रेणी में तीसरा पद 24 तथा 6 वाँ पद 192 है, तो 10 वाँ पद ज्ञात कीजिए |

Q19. अनुक्रम $7, 77, 777, 7777, ...$ के n पदों का योगफल ज्ञात कीजिए |

Q20. अनुक्रम $8, 88, 888, 8888, ...$ के n पदों का योगफल ज्ञात कीजिए |

Q21. श्रेढ़ी $5 + 55 + 555 + 5555 + ...$ के n पदों का योगफल ज्ञात कीजिए |

Q22. अनुक्रम $.6 + .66 + .666 + .6666 + ...$ के n पदों का योगफल ज्ञात कीजिए |

Q23. Fibonacci अनुक्रम निम्नलिखित रूप में परिभाषित है :

$$1 = a_1 = a_2 \text{ तथा}$$
$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}\ ,\ n > 2$$

तो $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ ज्ञात कीजिए, जबकि $n = 1, 2, 3, 4, 5.$

Q24. दो समांतर श्रेढ़ियों के n पदों के योगफलों का अनुपात $(3n + 8) : (7n + 15)$ है | 12 वें पदों का अनुपात ज्ञात कीजिए |

Q25. दो समांतर श्रेढ़ियों के n पदों के योगफलों का अनुपात $5n + 4 : 9n + 6$ हो, तो उनके 18 वें पदों का अनुपात ज्ञात कीजिए |

Q26. यदि किसी समांतर श्रेढ़ी के प्रथम p, q, r पदों का योगफल क्रमशः , a, b तथा c हो तो सिद्ध कीजिए कि $\frac{a}{p}(q - r) + \frac{b}{q}(r - p) + \frac{c}{r}(p - a) = 0$.

Q27. यदि $\frac{a^n + b^n}{a^{n-1} + b^{n-1}}$, a तथा b के मध्य समांतर माध्य हो तो n का मान ज्ञात कीजिए |

Q28. यदि दो धनात्मक संख्याओं a तथा b के बीच समांतर माध्य तथा गुणोत्तर माध्य क्रमशः 10 तथा 8 हैं तो संख्याएँ ज्ञात कीजिए |

Q29. n का मान ज्ञात कीजिए ताकि $\frac{a^{n+1} + b^{n+1}}{a^n + b^n}$, a तथा b के बीच गुणोत्तर हो |

Q30. एक व्यक्ति की प्रथम वर्ष में आय Rs. 3,00,000 है तथा उसकी आय Rs. 10,000 प्रति वर्ष, उन्नीस वर्षों तक बढती है, तो उसके द्वारा 20 वर्षों में प्राप्त आय ज्ञात कीजिए |

Q31. 100 तथा 1000 के मध्य उन सभी प्राकृत संख्याओं का योगफल ज्ञात कीजिए जो 5 के गुणज हों |

Q32. किसी समांतर श्रेणी में प्रथम पद 2 है तथा प्रथम पांच पदों का योगफल, अगले पांच पदों के योगफल का एक चौथाई है | दर्शाइए कि 20 वाँ पद – 112 है |

Q33. समांतर श्रेणी $-6, -\frac{11}{2}, -5, ...$ के कितने पदों का योगफल – 25 है ?

Q34. किसी समांतर श्रेणी 25 , 22 ,19 , ... के कुछ पदों का योगफल 116 है तो अंतिम पद ज्ञात कीजिए |

Q35. उस समांतर श्रेणी के n पदों के योगफल ज्ञात कीजिए, जिसका k वाँ पद 5 k + 1 है |

Q36. यदि किसी समांतर श्रेणी के n पदों का योगफल $(pn + qn^2)$ है, जहाँ p तथा q अचर हों तो सार्व अंतर ज्ञात कीजिए |

Q37. गुणोत्तर श्रेणी $3, \frac{3}{2}, \frac{3}{4}, ...$ के कितने पद आवश्यक हैं ताकि उनका योगफल $\frac{3069}{512}$ हो जाए?

Q38. एक गुणोत्तर श्रेणी के प्रथम तीन पदों का योगफल $\frac{13}{12}$ है तथा उनका गुणनफल 1 है, तो सार्व अनुपात ज्ञात कीजिए |

Q39. ऐसी 3 संख्याएँ ज्ञात कीजिए जिनको 1 तथा 256 के बीच रखने पर प्राप्त अनुक्रम एक गुणोत्तर श्रेणी बन जाए |

Q40. किसी गुणोत्तर श्रेणी का 5 वाँ, 8 वाँ तथा 11 वाँ पद क्रमशः p , q तथा s हैं, तो दिखाइए कि $q^2 = ps$.

Q41. मान ज्ञात कीजिए $\sum_{k=1}^{11}(2+3^k)$.

....

उत्तरमाला

(वस्तुनिष्ठ प्रश्न)

A1. 1. (c) 256 2. (a) 35 3. (a) $10\sqrt{3}$ 4. (d) 0 5. (c) $\frac{1}{9}$ 6. (d) $\frac{n(n+1)}{2}$ 7. (b) 120

A2. 1. $\pm\sqrt{ab}$ 2. $5\sqrt{2}$ 3. 625 4. समांतर माध्य

A3. 1. असत्य 2. असत्य 3. सत्य 4. असत्य 5. असत्य

A4. 1. ar^{n-1} 2. $S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}, r<1$, $S_n = \frac{a(r^n-1)}{r-1}, r>1$ 3. $a+(n-1)d$

4. $\frac{n}{2}[2a+(n-1)d]$

****

अध्याय 10: सरल रेखाएँ

स्मरणीय बिन्दु

- यदि m_1 और m_2 ढाल वाली दो रेखाओं के बीच का कोण θ हो तो $\tan\theta = \left|\frac{m_2-m_1}{1+m_1m_2}\right|$.
- दो रेखाएँ जिनके ढाल m_1 और m_2 हैं, समांतर होंगी यदि $m_1 = m_2$.
- दो रेखाएँ जिनके ढाल m_1 और m_2 हैं, लम्बवत होंगी यदि $m_1.m_2 = -1$.
- दो बिन्दुओं $A(x_1 , y_1)$ और $B(x_2 , y_2)$ के बीच की दूरी
  $$AB = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$
- दो बिन्दुओं (x_1 , y_1) और (x_2 , y_2) से होकर जाने वाली रेखा का ढाल $= \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$.
- अंतःखंड रूप में सरल रेखा का समीकरण
  $$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$$
  जहाँ a तथा b क्रमशः x और y अंतः खंड हैं ।
- यदि एक रेखा x-अक्ष की धन दिशा से α कोण बनाती है तो रेखा की ढाल $m=\tan\alpha$, $\alpha \neq 90^0$ है |
- क्षैतिज रेखा की ढाल शून्य है और ऊर्ध्वाधर रेखा की ढाल अपरिभाषित है |
- दो रेखाएँ समांतर होती हैं यदि और केवल यदि उनके ढाल समान हैं |
- दो रेखाएँ परस्पर लम्बवत होती हैं यदि और केवल यदि उनके ढालों का गुणनफल – 1 है |
- तीन बिंदु A, B और C संरेख होते हैं यदि और केवल यदि AB की ढाल = BC की ढाल |
- दो बिन्दुओं (x_1 , y_1) और (x_2 , y_2) से होकर जाने वाली रेखा का समीकरण है :
  $$y-y_1 = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}.(x-x_1)$$
- ढाल m और $y-$अंतःखण्ड c वाली रेखा का समीकरण है : $y = mx + c$.

- ढाल m और $x-$अंतःखण्ड d वाली रेखा का समीकरण है : $y=m(x-d)$..
- मूल बिंदु से लाम्बिक दूरी p और इस लम्ब तथा धन $x-$अक्ष के बीच w कोण बनाने वाली रेखा का समीकरण है : $x\cos w+y\sin w=p$.
- यदि A और B एक साथ शून्य न हों तो $Ax+By+C=0$ के रूप का कोई समीकरण रेखा का व्यापक रैखिक समीकरण या रेखा का व्यापक समीकरण कहलाता है |
- एक बिंदु $(x_1\ ,y_1)$ से रेखा $Ax+By+C=0$ की लाम्बिक दूरी (d) इस प्रकार है कि : $d=\frac{|Ax_1+By_1+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$.
- समांतर रेखाओं $Ax+By+C_1=0$ और $Ax+By+C_2=0$ के बीच की दूरी है : $d=\frac{|C_1-C_2|}{\sqrt{A^2+B^2}}$.

Q1. सही विकल्प चुनिये:

1. यदि एक रेखा $x-$ अक्ष की धन दिशा से α कोण बनाती है तो रेखा का ढाल होगा :

   (a) $\tan\alpha$ (b) $\cot\alpha$ (c) $\sin\alpha$ (d) $\cos\alpha$

2. दो रेखाएँ परस्पर लंबवत हैं तो उनके ढालों का गुणनफल होगा :

   (a) 0 (b) 1 (c) -1 (d) 2

3. यदि m_1 और m_2 ढाल वाली दो रेखाओं के बीच का कोण θ हो तो

   (a) $\tan\theta=\left|\frac{m_2-m_1}{1+m_1m_2}\right|$. (b) $\tan\theta=\left|\frac{m_2+m_1}{1+m_1m_2}\right|$.

   (c) $\tan\theta=\left|\frac{m_2-m_1}{1-m_1m_2}\right|$. (d) $\tan\theta=\left|\frac{m_2m_1}{1+m_1m_2}\right|$

4. दो रेखाएँ जिनके ढाल m_1 और m_2 हैं, समांतर होंगी यदि

   (a) $m_1=m_2$. (b) $m_1=-m_2$. (c) $m_1=m_2{}^2$. (d) $m_1=m^3{}_2$. .

5. दो बिन्दुओं $(x_1\ ,\ y_1)$ और $(x_2\ ,\ y_2)$ से होकर जाने वाली रेखा का ढाल=

   (a) $\frac{y_2+y_1}{x_2-x_1}$. (b) $\frac{y_2-y_1}{x_2+x_1}$. (c) $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$. (d) $\frac{y_2+y_1}{x_2+x_1}$. .

Q2. रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए:

1. क्षैतिज रेखा की ढाल शून्य है और ऊर्ध्वाधर रेखा की ढाल .... है |
2. दो रेखाएँ समांतर होती हैं यदि और केवल यदि उनके ढाल .... हैं |
3. यदि एक रेखा x-अक्ष की धन दिशा से α , $\alpha\neq 90^0$ कोण बनाती है तो रेखा की ढाल ....है |
4. यदि AB की ढाल = BC की ढाल तो बिंदु A, B और C.......... होंगें |

Q3. सत्य / असत्य लिखिए :

1. m_1 और m_2 ढालों वाली रेखाओं L_1 और L_2 के बीच का न्यून कोण θ हो तो $\tan\theta=\left|\frac{m_2-m_1}{1+m_1m_2}\right|,1+m_1m_2\neq 0$.
2. तीन बिंदु A , B और C संरेख होते हैं यदि और केवल यदि AB की ढाल = BC की ढाल |
3. दो बिन्दुओं $(x_1\ ,\ y_1)$ और $(x_2\ ,\ y_2)$ से होकर जाने वाली रेखा का समीकरण है :

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

4. ढाल m और $y -$ अंतःखण्ड c वाली रेखा का समीकरण है : $y = mx + c$.
5. ढाल m और $x -$ अंतःखण्ड d वाली रेखा का समीकरण है : $y = m(x + d)$.

Q4. एक शब्द या वाक्य में उत्तर लिखिए:

1. बिंदु $(-2, 3)$ से जाने वाली और ढाल -4 की रेखा का समीकरण लिखिए |
2. उस रेखा का समीकरण लिखिए जो $x-$ अक्ष और $y-$ अक्ष से क्रमशः -3 और 2 के अंतःखंड बनाती है |
3. उस रेखा के ढाल का मान कितना होगा जो बिन्दुओं $(3, -2)$ और $(-1, 4)$ से होकर जाती है |
4. उस रेखा के ढाल का मान कितना होगा जो धन $x-$अक्ष से 60^0 का कोण बनाती है |

Q5. $(-2, 6)$ और $(4, 8)$ बिन्दुओं को मिलाने वाली रेखा, $(8, 12)$ और $(x, 24)$ बिन्दुओं को मिलाने वाली रेखा पर लम्ब है | x का मान ज्ञात कीजिए |

Q6. बिन्दुओं $(1, -1)$ और $(3, 5)$ से होकर जाने वाली रेखा का समीकरण लिखिए |

Q7. उस रेखा का समीकरण लिखिए जिनके लिए $\tan\theta = \frac{1}{2}$, जहाँ θ रेखा का झुकाव है और $y-$ अंतःखंड $-\frac{3}{2}$ है |

Q8. उस रेखा का समीकरण लिखिए जिनके लिए $\tan\theta = \frac{1}{2}$, जहाँ θ रेखा का झुकाव है और $x-$ अंतःखंड 4 है |

Q9. उस रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसकी मूल बिंदु से लाम्बिक दूरी 5 इकाई और लम्ब, धन $x-$अक्ष से 30^0 का कोण बनाती है |

Q10. एक रेखा का समीकरण $3x - 4y + 10 = 0$ है, इसका ढाल ज्ञात कीजिए |

Q11. एक रेखा का समीकरण $3x - 4y + 10 = 0$ है, इसके x- अंतःखंड और y - अंतःखंड ज्ञात कीजिए ||

Q12. बिंदु $(3, -5)$ की रेखा $3x - 4y - 26 = 0$ से दूरी ज्ञात कीजिए |

Q13. कार्तीय तल में एक चतुर्भुज खींचिए जिसके शीर्ष $(-4, 5)$, $(0, 7)$, $(5, -5)$, और $(-4, -2)$ हैं | इसका क्षेत्रफल भी ज्ञात कीजिए |

Q14. $x-$अक्ष पर एक बिन्दु ज्ञात कीजिए जो $(7, 6)$ और $(3, 4)$ बिन्दुओं से समान दूरी पर है |

Q15. x का वह मान ज्ञात कीजिए जिसके लिए बिन्दु $(x, -1), (2, 1)$ और $(4, 5)$ संरेख हैं |

Q16. यदि तीन बिन्दु $(h, 0), (a, b)$ और $(0, k)$ एक रेखा पर हैं तो दिखाइए कि $\frac{a}{h} + \frac{b}{k} = 1$.

Q17. समीकरण $\sqrt{3}x + y - 8 = 0$ को लम्ब रूप में रूपांतरित कीजिए और p तथा w के मान ज्ञात कीजिए |

Q18. $y - \sqrt{3}x - 5 = 0$ और $\sqrt{3}y - x + 6 = 0$ रेखाओं के बीच का कोण ज्ञात कीजिए|

Q19. $\sqrt{3}x + y = 1$ और $x + \sqrt{3}y = 1$ रेखाओं के बीच का कोण ज्ञात कीजिए|

Q20. समांतर रेखाओं $3x - 4y + 7 = 0$ और $3x - 4y + 5 = 0$ के बीच की दूरी ज्ञात कीजिए |

Q21. यदि दो रेखाओं के बीच का कोण $\frac{\pi}{4}$ है और एक रेखा की ढाल $\frac{1}{2}$ है तो दूसरी रेखा की ढाल ज्ञात कीजिए|

Q22. एक रेखा की ढाल दूसरी रेखा की ढाल का दुगुना है | यदि दोनों के बीच के कोण की स्पर्शज्या (tangent) $\frac{1}{3}$ है तो रेखाओं की ढाल ज्ञात कीजिए |

Q23. बिन्दु $(2, 2)$ से जाने वाली रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसके द्वारा अक्षों से कटे अंतःखंडों का योग 9 है |

Q24. अक्षों के बीच रेखाखण्ड का मध्य बिन्दु $P(a, b)$ है | दिखाइए कि रेखा का समीकरण $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=2$ है |

Q25. अक्षों के बीच रेखाखंड को बिन्दु $R(h, k)$, $1:2$ के अनुपात में विभक्त करता है | रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए |

Q26. दर्शाइए कि रेखाएँ $a_1x+b_1y+c_1=0$ और $a_2x+b_2y+c_2=0$, जहाँ $b_1, b_2 \neq 0$

(i) समांतर है यदि $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}$ और (ii) लंब है यदि $a_1a_2+b_1b_2=0$.

Q27. यदि p मूल बिन्दु से उस रेखा पर डाले गए लंब की लंबाई हो जिस पर अक्षों पर कटे अंतः-खंड a और b हों , तो दिखाइए कि $\frac{1}{p^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}$.

Q28. 2a भुजा के समबाहु त्रिभुज का आधार y –अक्ष के अनुदिश इस प्रकार है कि आधार का मध्य बिंदु मूल बिंदु पर है | त्रिभुज के शीर्ष ज्ञात कीजिए |

Q29. रेखा की ढाल ज्ञात कीजिए जो मूल बिंदु और P(0 ,- 4) तथा B(8 ,-0) बिन्दुओं को मिलाने वाले रेखाखंड के मध्य बिंदु से जाती हैं |

Q30. पाइथागोरस प्रमेय के प्रयोग के बिना दिखलाइए कि बिंदु (4, 4), (3, 5) और (-1, -1) एक समकोण त्रिभुज के शीर्ष हैं |

Q31. उस रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जो y –अक्ष की धन दिशा से वामावर्त मापा गया 30^0 का कोण बनाती है |

Q32. दूरी सूत्र का प्रयोग किए बिना दिखलाइए कि बिंदु (-2, -1), (4, 0), (3, 3) और (-3 , 2) एक समांतर चतुर्भुज के शीर्ष हैं |

Q33. x-अक्ष और (3 ,-1) और (4 , -2) बिन्दुओं को मिलाने वाली रेखा के बीच का कोण ज्ञात कीजिए |

Q34. एक रेखा (1, 0) तथा (2 , 3) बिन्दुओं को मिलाने वाली रेखा खंड पर लम्ब है तथा उसको 1: n के अनुपात में विभाजित करती है | रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए |

Q35. रेखा x – 2 y + 3 = 0 पर लम्ब और बिंदु (1 , -2) से जाने वाली रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए |

****

उत्तरमाला
(वस्तुनिष्ठ प्रश्न)

A1. 1. (a) $\tan\alpha$ 2. (c) -1 3. (a) $\tan\theta=\left|\frac{m_2-m_1}{1+m_1m_2}\right|$ 4. (a) $m_1=m_2$.

5. (c) $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$

A2. 1. अपरिभाषित 2. समान 3. $\tan\alpha$ 4. संरेख

A3. 1. सत्य 2. सत्य 3. असत्य 4. सत्य 5. असत्य

A4. 1. $4x+y+5=0$ 2 . $2x-3y+6=0$ 3 . $-\frac{3}{2}$ 4 . $\sqrt{3}$

....

अध्याय 11 शंकु परिच्छेद

स्मरणीय बिंदु:-

- वृत का व्यापक समीकरण

  $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$

  त्रिज्या $= \sqrt{g^2 + f^2 - c}$ तथा केंद्र $(-g, -f)$ होगा।

- परवलय $y^2 = 4ax$ में

  नाभि के निर्देशांक = $(a, 0)$

  परवलय की अक्ष = $x-$ अक्ष

  नियता का समीकरण: $x = -a$

  नाभिलंब जीवा की लंबाई = $4a$

- परवलय $x^2 = 4ay$ में

  नाभि के निर्देशांक = $(0, a)$

  परवलय की अक्ष = $y-$ अक्ष

  नियता का समीकरण: $y = -a$

  नाभिलंब जीवा की लंबाई = $4a$

- दीर्घवृत $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $a > b$ में

  दीर्घ –अक्ष (x-अक्ष पर) की लंबाई = $2a$

  लघु –अक्ष (y-अक्ष पर) की लंबाई = $2b$

  उत्केन्द्रता: $e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$

  नाभिलंब जीवा की लंबाई = $\frac{2b^2}{a}$

- दीर्घवृत $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$, $a > b$ में

  दीर्घ –अक्ष (y-अक्ष पर) की लंबाई = $2a$

  लघु –अक्ष (x-अक्ष पर) की लंबाई = $2b$

  उत्केन्द्रता: $e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$

  नाभिलंब जीवा की लंबाई = $\frac{2b^2}{a}$

- अतिपरवलय $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ में

  अनुप्रस्थ –अक्ष (x-अक्ष पर) की लंबाई = $2a$

  संयुग्मी –अक्ष (y-अक्ष पर) की लंबाई = $2b$

उत्केन्द्रता: $e=\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}$

नाभिलंब जीवा की लंबाई = $\frac{2b^2}{a}$

- अतिपरवलय $\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$ में

  अनुप्रस्थ –अक्ष (y-अक्ष पर) की लंबाई = $2a$

  संयुग्मी –अक्ष (x-अक्ष पर) की लंबाई = $2b$

  उत्केन्द्रता: $e=\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}$

  नाभिलंब जीवा की लंबाई = $\frac{2b^2}{a}$

Q 1 **सही विकल्प चुनिए:-**

(I) वृत्त का समीकरण जिसका केन्द्र मूल बिन्दु पर तथा त्रिज्या 4 है-

(अ) $x^2 + y^2 = 4$ (ब) $\sqrt{x^2+y^2}=4$

(स) $x^2 + y^2 = 16$ (द) $x^2 - y^2 = 16$

(II) यदि किसी परवलय का शीर्ष मूल बिन्दु तथा नाभि (0, a) है तो उसका समीकरण होगा-

(अ) $y^2 = 4ax$ (ब) $x^2 = 4ay$

(स) $y^2 = -4ax$ (द) $x^2 = -4ay$

(III) परवलय $x^2 = 16y$ की नाभिकीय लम्ब जीवा की लम्बाई होगी

(अ) -16 (ब) +4

(स) -4 (द) 16

(IV) नाभि (2, 0) तथा नियता x = -2 वाले परवलय का समीकरण होगा-

(अ) $y^2 = -4x$ (ब) $x^2 = 8y$

(स) $y^2 = 4x$ (द) $y^2 = 8x$

(V) दीर्घ वृत्त $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ के नाभिलम्ब जीवा की लम्बाई है-

(अ) $\frac{2b}{a}$ (ब) $\frac{2b^2}{a}$

(स) $\frac{a}{2b^2}$ (द) $\frac{2a}{b}$

(VI) समकोणिक अतिपरवलय की उत्केन्द्रता है-

(अ) 2 (ब) 1

(स) $\sqrt{2}$ (द) 0

(VII) दीर्घवृत्त की उत्केन्द्रता होती है-

(अ) 1 (ब) 1 से अधिक

(स) 1 से कम (द) 0

(VIII) दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ के दीर्घाक्ष की लम्बाई है-

(अ) 9 (ब) 4

(स) 3 (द) 6

(IX) अतिपरवलय $\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{27} = 1$ की उत्केन्द्रता क्या होगी-

(अ) 2 (ब) 1

(स) $\frac{2}{\sqrt{3}}$ (द) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

(X) किस शंकु परिच्छेद की उत्केन्द्रता शून्य होती है-

(अ) अतिपरवलय (ब) परवलय

(स) वृत्त (द) दीर्घवृत्त

Q2. रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिएः-

(I) वृत्त $(x+5)^2 + (y-3)^2 = 36$ का केन्द्र .... है।
[(5, 3)/(-5, 3)/(5, -3]

(II) वृत्त पर किसी एक बिन्दु की केन्द्र से दूरी को .... कहते हैं। [व्यास/त्रिज्या/जीवा]

(III) परवलय $x^2 = -4ay$ की नियता का समीकरण .... है। {y = - a / y = a / x = - a}

(IV) परवलय $y^2 = -4ax$ की नाभि .... है। {0, a) / (- a , 0) / (a , 0)}

(V) दीर्घवृत्त में नाभियों की संख्या .... है। {1 / 2 / 3}

(VI) यदि दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ में a = b बनने वाला वक्र .... होता है।
{परवलय / वृत्त / अतिपरवलय}

(VII) अतिपरवलय $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ का अनुप्रस्थ अक्ष .... होगा। $\{y = 0/x = 0/x = 0\}$

(VIII) अतिपरवलय की उत्केन्द्रता .... होती है। {1 से कम/1 से अधिक/1 के बराबर}

Q 3 . सही जोड़ी बनाइएः-

	स्तम्भ I		स्तम्भ II
(i)	वक्र $x^2 = 4y$ की नाभिलम्ब जीवा की लम्बाई	a.	8
(ii)	वक्र $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ का दीर्घाक्ष है	b.	4
(iii)	वक्र $x^2 + y^2 = 4$ की त्रिज्या है।	c.	2
(iv)	वक्र $x^2 + (y-4)^2 = r^2$ का केन्द्र है।	d.	(0, 4)
(v)	$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ की उत्केन्द्रता है।	e.	$\frac{\sqrt{5}}{3}$

Q 4. एक शब्द/वाक्य में उत्तर दीजिए-

(i) केन्द्र (2, -1) एवं त्रिज्या 5 वाले वृत्त का समीकरण लिखिए?

(ii) वृत्त $(x+7)^2 + (y-4)^2 = 2$ का केन्द्र एवं त्रिज्या ज्ञात कीजिए?

(iii) परवलय का समीकरण लिखिए जिसका शीर्ष (0, 0) तथा नाभि (-2, 0) हो?

(iv) वक्र $x^2 = -8y$ की नियता का समीकरण लिखिए?

(v) परवलय $y^2 = -16x$ के नाभि का निर्देशांक लिखिए?

(vi) वक्र $36x^2 + 4y^2 = 144$ के दीर्घाक्ष एवं लघुअक्ष की लम्बाईयां लिखिए?

(vii) यदि दीर्घवृत्त के दीर्घाक्ष की लम्बाई 10 एवं लघुअक्ष की लम्बाई 6 है तो उसका समीकरण लिखिए?

(viii) यदि किसी अतिपरवलय के अनुप्रस्थ अक्ष एवं संयुग्मी अक्ष बराबर हो तो उस वक्र को क्या कहते हैं?

(ix) अतिपरवलय $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$ की नाभियाँ किस अक्ष पर है?

Q 5 . सत्य/असत्य लिखिए-

1 वृत्त $(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 9$ का केन्द्र (2,3) है।

2 वृत्त $x^2 + (y - 5)^2 = 4$ का केन्द्र y - अक्ष पर है।

3 परवलय $y^2 = 4ax$ की नियता का समीकरण $x = -a$ है।

4 परवलय $x^2 = 4ay$ की नाभिलम्ब जीवा की लम्बाई 2a है।

5 यदि परवलय की सममित अक्ष x- अक्ष के अनुदिश है तथा x का गुणांक धनात्मक हो तो परवलय दांई ओर खुलता है।

6 तल के उन बिन्दुओं का समुच्चय जिनका तल में दो बिन्दुओं से दूरियों का योग अचर हो दीर्घवृत्त कहलाता है।

Q6. उस वृत्त का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसका केन्द्र (1, 1) और त्रिज्या $\sqrt{2}$ इकाई है।

Q7. वृत्त $x^2 + y^2 + 8x + 10y - 8 = 0$ का केन्द्र तथा त्रिज्या ज्ञात कीजिए?

Q8. क्या बिन्दु (- 2.5 , 3.5) वृत्त $x^2 + y^2 = 25$ के अन्दर , बाहर या वृत्त पर स्थित है?

Q9. उस वृत्त का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसका केन्द्र (2, 2) हो तथा बिन्दु (4, 5) से जाता है।

Q10. परवलय $y^2 = 10x$ के नाभि के निर्देशांक और नियता का समीकरण ज्ञात कीजिए?

Q11. उस परवलय का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसकी नाभि (0 , - 3) और नियता y = 3 है।

Q12. उस परवलय का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसका शीर्ष (0, 0) तथा नाभि (3, 0) हो?

Q13. दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ के नाभियों के निर्देशांक, उत्केन्द्रता तथा नाभिलम्ब जीवा ज्ञात कीजिए?

Q14. उस दीर्घवृत्त का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसकी नाभियों के निर्देशांक $(\pm 5, 0)$ तथा शीर्षों के निर्देशांक $(\pm 13, 0)$ है?

Q15. उस दीर्घवृत्त का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसके दीर्घाक्ष की लम्बाई 16 एवं नाभियाँ $(0, \pm 6)$ हैं?

Q16. उस दीर्घवृत्त के शीर्षो के निर्देशांक, दीर्घ अक्ष और लघुअक्ष की लम्बाईयाँ ज्ञात कीजिए जिसका समीकरण $16x^2 + y^2 = 16$ है?

Q17. अतिपरवलय की परिभाषा लिखिए?

Q18. उस अतिपरवलय का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसकी नाभियाँ $(0, \pm 13)$ एवं संयुग्मी अक्ष की लम्बाई 24 है?

Q19. उस अतिपरवलय का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसका शीर्ष $(0, \pm 3)$ और नाभियाँ $(0, \pm 5)$ हैं?

Q20. अतिपरवलय $5y^2 - 9x^2 = 36$ की उत्केन्द्रता एवं नाभिलम्ब जीवा की लम्बाई ज्ञात कीजिए

Q21. त्रिज्या 6 के उस वृत्त का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसका केन्द्र x अक्ष पर हो और जो बिन्दु (2, 3) से जाता है?

Q22. बिन्दु (0, 0) से होकर जाने वाले वृत्त का समीकरण ज्ञात कीजिए जो निर्देशांक्षों पर a और b अन्तः खण्ड बनाता है?

Q23. उस परवलय का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसका शीर्ष (0, 0) तथा जो बिंदु (5, 2) से जाता है और y अक्ष के सापेक्ष सममित है?

Q24. परवलय $x^2 = -24y$ के नाभि के निर्देशांक, नियता के समीकरण और परवलय का अक्ष ज्ञात कीजिए?

Q25. उस दीर्घवृत्त का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसका दीर्घाक्ष x अक्ष के अनुदिश है और बिन्दु (4 , 3) एवं (- 1 , 4) दीर्घवृत्त पर स्थित है।

Q26. उस दीर्घवृत्त का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसके दीर्घाक्ष के सीमांत बिन्दु $(\pm 3, 0)$ और लघुअक्ष के सीमांत बिन्दु $(0, \pm 2)$ हैं।

Q27. अतिपरवलय $16x^2 - 9y^2 = 576$ के शीर्षों, नाभियों के निर्देशांक और उत्केन्द्रता ज्ञात कीजिए?

Q28. अतिपरवलय $49y^2 - 16x^2 = 784$ के अनुप्रस्थ अक्ष, संयुग्मी अक्ष एवं नाभिलम्ब जीवा की लम्बाईयाँ ज्ञात कीजिए?

Q29. उस अतिपरवलय का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसका शीर्ष $(\pm 7, 0)$ एवं उत्केन्द्रता $e = \frac{4}{3}$ है।

Q30. बिन्दुओं (2, 3) और (-1, 1) से जाने वाले वृत्त का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसका केन्द्र रेखा $x - 3y - 11 = 0$ पर स्थित है?

Q31. उस वृत्त का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसका केन्द्र वृत्त $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 4 = 0$ के केन्द्र पर हो तथा बिन्दु (4 , 3) से जाता हो?

Q32. उस परवलय का समीकरण ज्ञात कीजिए जो y - अक्ष के परितः सममित हो तथा बिन्दु (2, - 3) से गुजरता हो। इसकी नाभिलम्ब जीवा भी ज्ञात कीजिए?

Q33. परवलय $y^2 = -32x$ के नाभि के निर्देशांक, अक्ष, नियता का समीकरण और नाभिलम्ब जीवा की लम्बाई ज्ञात कीजिए?

Q34. उस दीर्घ वृत्त का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसका दीर्घाक्ष x- अक्ष पर और बिन्दुओं (4 , 3) और (6, 2) से जाता है?

Q35. उस दीर्घ वृत्त का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसका केन्द्र (0, 0) पर दीर्घ अक्ष y-अक्ष पर और बिन्दुओं (3, 2) एवं (1, 6) से जाता है?

Q36. दीर्घ वृत्त $16x^2 + 25y^2 = 400$ के दीर्घाक्ष, लघुअक्ष, नाभियों एवं शीर्षों के निर्देशांक तथा उत्केन्द्रता ज्ञात कीजिए?

Q37. उस अतिपरवलय का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसकी नाभियाँ $(0, \pm\sqrt{10})$ हैं तथा बिन्दु (2, 3) से होकर जाता है?

Q38. उस अतिपरवलय का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसकी नाभियाँ $(\pm 4, 0)$ एवं नाभिलम्ब जीवा की लम्बाई 12 है?

Q39. 15 से.मी. लम्बी एक छड़ AB दोनों निर्देशाक्षों के बीच इस प्रकार रखी गई है कि उसका एक सिरा A, X- अक्ष पर दूसरा सिरा B, y- अक्ष पर रहता है, छड़ पर एक बिन्दु p (x, y) इस प्रकार लिया गया है कि AP = 6 से.मी. है तो बिन्दु P का बिन्दु पथ ज्ञात कीजिए तथा बताइये कि यह कौन सा वक्र है।

....

उत्तरमाला
(वस्तुनिष्ठ प्रश्न)

A1. (i) (स) (ii) (ब) (iii) (द) (iv) (द) (v) (ब) (vi) (स) (vii) (स) (viii) (द) (ix) (अ) (x) (स)

A2. (I) (−5, 3) (II) त्रिज्या (III) y = a (IV) (-a, 0) (V) 2 (VI) वृत्त (VII) y = 0 (VIII) 1 से अधिक

A3. (i) ↔ (b), (ii) ↔ (a), (iii) ↔ (c), (iv) ↔ (d), (v) ↔ (e)

A 4. (i) $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 25$ (ii) केंद्र (−7, 4), त्रिज्या = $\sqrt{2}$ (iii) $y^2 = -8x$

(iv) $y = 2$ या $y - 2 = 0$ (v) (−4, 0) (vi) दीर्घाक्ष = 12, लघु अक्ष = 4

(vii) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ (viii) समकोणीय अतिपरवलय (ix) y - अक्ष पर

A5. 1. असत्य 2. सत्य 3. सत्य 4. असत्य 5. सत्य 6. सत्य

****

अध्याय 12: त्रिविमीय ज्यामिति का परिचय

स्मरणीय बिंदु:-

1. **त्रिविमीय ज्यामितिः-** जिस प्रकार किसी तल में स्थित एक बिन्दु की स्थिति निर्धारण करने के लिए दो परस्पर लम्ब प्रतिच्छेदी रेखाओं से लाम्बिक दूरियों की आवश्यकता पड़ती है। इन रेखाओं को निर्देशांक्ष तथा दो लाम्बिक दूरियों को अक्षों के सापेक्ष बिन्दु का निर्देशांक कहते हैं ठीक उसी प्रकार अंतरिक्ष में एक बिन्दु की स्थिति को निर्धारण करने के लिए अंतरिक्ष को तीन परस्पर प्रतिच्छेदित करने वाले तलों की आवश्यकता पड़ती है। इन तलों से लम्ब दूरियों को व्यक्त करने वाली तीन संख्याएं उस बिन्दु के तीन निर्देशांक तलों के सापेक्ष निर्देशांक कहलाते हैं।

   ये तल निर्देशांक तल तथा इनसे बनने वाली तीन परस्पर लम्बवत रेखाएं निर्देशांक्ष कहलाती हैं। तथा बिन्दु P(x, y, z) का निर्देशांक होता है।

   जहाँ पर तीनों तल परस्पर लम्बवत मिलते हैं वह मूल बिन्दु (0, 0, 0) होता है।

   निर्देशांक तल- तीनों निर्देशांक तल रेखाओं XOX', YOY', ZOZ' पर प्रतिच्छेद करते हैं जिन्हें X-अक्ष, Y-अक्ष, Z-अक्ष कहते हैं, तथा XOY, YOZ, ZOX को निर्देशांक तल कहते हैं, इन तलों को XY, YZ, ZX तल भी कहते हैं।

   अष्टांशः- ये तीनों तल अंतरिक्ष को आठ भागों में बांटते हैं जिन्हें अष्टांश कहते हैं।

2. दो बिन्दुओं के बीच की दूरी यदि दो बिन्दुओं के निर्देशांक क्रमशः $P(x_1, y_1, z_1)$ एवं $Q(x_2, y_2, z_2)$ हो तो उनके बीच की दूरी
   PQ = $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$

3. मूल बिन्दु O(0, 0, 0) से बिन्दु P(x,y,z) की दूरी OP = $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

4. बिन्दु P(x, y, z) की x अक्ष से दूरी= $\sqrt{y^2 + z^2}$
   बिन्दु P(x, y, z) की y अक्ष से दूरी= $\sqrt{x^2 + z^2}$
   बिन्दु P(x, y, z) की z अक्ष से दूरी= $\sqrt{x^2 + y^2}$
   बिन्दु P(x, y, z) की xy समतल से दूरी= z
   बिन्दु P(x, y, z) की yz तल की दूरी = x
   बिन्दु P(x, y, z) की zx तल से दूरी= y

<u>वस्तुनिष्ठ प्रश्न</u> : –

Q1. सही विकल्प चुनिए : –

(I) x-अक्ष पर किसी बिन्दु के निर्देशांक होते हैं–

(अ) (0, x, 0) (ब) (x, 0, 0)

(स) (0, 0, x) (द) (x, x, x)

(II) xy - समतल पर किसी बिन्दु के निर्देशांक होते हैं–

(अ) (0, y, z) (ब) (x, 0, z)

(स) (x, y, 0) (द) (x, y, z)

(III) y -अक्ष पर किसी बिन्दु के निर्देशांक होते हैं–

(अ) (0, y, 0) (ब) (y, 0, 0)

(स) (0, 0, y) (द) (y, y, y)

(IV) यदि कोई बिन्दु z- अक्ष पर है तो उसके निर्देशांक होंगे –

(अ) (z, 0, 0) (ब) (0, z, 0)

(स) (0, 0, z) (द) (z, z, z)

(V) ZX - तल पर किसी बिन्दु के निर्देशांक होते हैं–

(अ) (x, 0, z) (ब) (x, y, 0)

(स) (x, y, z) (द) (0, y, z)

(VI) YZ - तल पर किसी बिन्दु के निर्देशांक होते हैं –

(अ) (0, y, z) (ब) (x, y, 0)

(स) (x, y, 0) (द) (x, y, z)

(VII) बिन्दु (4, 3, 6) की Z- अक्ष से दूरी होगी–

(अ) 6 (ब) 5

(स) $\sqrt{45}$ (द) $\sqrt{52}$

(VIII) बिन्दु (12, 5, 8) की XY - तल से दूरी है–

(अ) 13 (ब) 12

(स) 8 (द) 7

(IX) बिन्दु (3, - 2, 5) की Y- अक्ष से दूरी है –

(अ) $\sqrt{13}$ (ब) $\sqrt{34}$

(स) $\sqrt{29}$ (द) $\sqrt{8}$

Q2. रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए : –

(I) निर्देशांक्ष तल अंतरिक्ष को .... भागों में विभाजित करता है {4 /8 /3}

(II) Y अक्ष एवं Z अक्ष दोनों एक साथ मिलकर .... तल बनाते हैं। {xy / yz / zx}

(III) बिन्दु (7, 3, - 8) की YZ समतल से दूरी .... है। {7/3/8}

(IV) बिन्दुओं (1, - 3, 4) और (- 4, 1 , 2) के बीच की दूरी .... है। {$\sqrt{17}$ / $3\sqrt{5}$/$\sqrt{33}$}

(V) बिन्दु (3, -4, 5) की मूल बिन्दु से दूरी .... है। {$5\sqrt{2}$ /$3\sqrt{2}$ /5}

(VI) बिन्दु (−3, 5, 0) निर्देशांक तल..............पर है। {XY / YZ / ZX}

(VII) बिन्दु (5, 0, 0) .... अक्ष पर है। {x/y/z}

(VIII) ZX समतल में Y निर्देशांक का मान .... है। {y / 0 / x}

(IX) बिन्दु (- a, o , c) की ZX समतल से दूरी .... है। {a / c / o}

Q3. एक शब्द/वाक्य में उत्तर दीजिए–

(i) बिंदु (-3, 5, 0) किस तल पर स्थित है?

(ii) कोई बिन्दु ZX तल पर है तो उसका कौन सा निर्देशांक शून्य है?

(iii) बिन्दु (3, 0, 0) एवं (0, 4, 5) के बीच की दूरी क्या है?

(iv) तीनों निर्देशांक तल जिस बिन्दु पर प्रतिच्छेद करते हैं उसके निर्देशांक क्या है?

(v) यदि कोई बिन्दु XY तल पर है तो उसका कौन सा निर्देशांक ज्ञात है?

(vi) तीनों निर्देशांक तलों के परस्पर लम्बवत् प्रतिच्छेदन से बनने वाली तीनों रेखाओं को पृथक–पृथक क्या कहते हैं?

(vii) यदि कोई बिन्दु Z -अक्ष पर है तो उसके कौन–कौन से निर्देशांक ज्ञात हैं?

(viii) बिन्दु (- 3, 1, 4) की YZ -समतल से दूरी कितनी है?

(ix) बिन्दु (12, 5, 23) की Z अक्ष से दूरी कितनी है?

Q4. सत्य/असत्य लिखिए–

(i) बिन्दु (7, 0, 0), x-अक्ष पर स्थित है।

(ii) बिन्दु (3, 4, 5) की y-अक्ष से दूरी 4 है।

(iii) ZX - तल पर बिन्दु के निर्देशांक (x, 0, z) के रूप के होते हैं।

(iv) बिन्दु (x, y, z) की XY-तल से दूरी $\sqrt{x^2 + y^2}$ है।

(v) बिन्दु (4 , 1 , 7), YZ - तल पर स्थित है।

Q5. बिन्दुओं (- 1, 3, - 4) और (1, - 3, 4) के बीच की दूरी ज्ञात कीजिए?

Q6. दर्शाइये कि बिन्दु P(- 2, 3, 5), Q(1, 2, 3) और R(7, 0, - 1) संरेख है?

Q7. Y अक्ष पर उस बिन्दु के निर्देशांक ज्ञात कीजिए जिसकी बिन्दु P (3, - 2, 5) से दूरी $5\sqrt{2}$ है।

Q8. बिन्दुओं (- 3, 7, 2) और (2, 4, - 1) के बीच की दूरी ज्ञात कीजिए?

Q9. बिन्दु (- 3, 4, -5) की Y अक्ष से दूरी ज्ञात कीजिए?

Q10. बिन्दु (- 6, 7, -2) की बिन्दु (3, 1, 5) से दूरी ज्ञात कीजिए?

Q11. दर्शाइये कि बिन्दु (0, 7, 10), (-1, 6, 6) और (- 4, 9, 6) एक समकोण त्रिभुज के शीर्ष हैं?

Q12. बिन्दुओं (13, 5, 12) एवं (4, 3, -7) के बीच की दूरी ज्ञात कीजिए?

Q13. क्या बिन्दु (- 1, 7, 3), (4, 1, 2) तथा (3, 2, -5) संरेख हैं?

Q14. दर्शाइये कि बिन्दु (0 , 7, - 10), (1, 6, - 6) और (4, 9, -6) एक समबाहु त्रिभुज के शीर्ष हैं।

Q15. दर्शाइये कि बिन्दु (- 2, 3, 5), (1, 2, 3) और (7, 0, -1) संरेख है या नहीं |

Q16. दर्शाइये कि बिन्दु (3, -1, 5), (−2, 7, 1) एवं (5, 2, -3) संरेख है या नहीं?

Q17. क्या बिन्दु A(3, 6, 9), B(10, 20, 30) और C (25, -41, 5) समकोण त्रिभुज के शीर्ष हैं?

Q18. समान्तर चतुर्भज के तीन शीर्ष A (3, - 1, - 2), B (1, 2, - 4) व C (- 1, 1, 2) हैं। चौथे शीर्ष D के निर्देशांक ज्ञात कीजिए?

Q19. दो बिंदुओं A तथा B के निर्देशांक क्रमशः (3, 4, 5) और (- 1, 3, - 7) हैं | गतिशील बिंदु P के पथ का समीकरण ज्ञात कीजिए, जबकि $PA^2 + PB^2 = 2k^2$.

Q20. ऐसे बिन्दुओं के समुच्चय का समीकरण ज्ञात कीजिए जो बिंदुओं (1, 2, 3) और (3, 2, -1) से समदूरस्थ हैं |

21. बिन्दुओं P से बने समुच्चय का समीकरण ज्ञात कीजिए जिनकी बिंदुओं A(4, 0, 0) और B(- 4, 0, 0) से दूरियों का योगफल 10 है |

उत्तरमाला
(वस्तुनिष्ठ प्रश्न)

Q1.

(i) (ब)
(ii) (स)
(iii) (अ)
(iv) (स)
(v) (अ)
(vi) (अ)
(vii) (ब)
(viii) (स)
(ix) (ब)

Q2.

(i) 8
(ii) YZ
(iii) 7
(iv) $3\sqrt{5}$
(v) $5\sqrt{2}$
(vi) XY
(vii) x
(viii) 0
(ix) 0

Q 3.

(i) xy तल
(ii) y- निर्देशांक
(iii) $5\sqrt{2}$
(iv) (0,0,0)
(v) Z निर्देशांक
(vi) X अक्ष, Y अक्ष, Z अक्ष
(vii) Y एवं X निर्देशांक
(viii) 3
(ix) 13

Q4. सत्य/असत्य–

(i) सत्य
(ii) असत्य
(iii) सत्य
(iv) असत्य
(v) असत्य

अध्याय 13: सीमा और अवकलज

स्मरणीय तथ्य

- **सीमा**

फलन f(x) = x^2 पर विचार कीजिए | जैसे –जैसे x को शून्य के अधिक निकट मान देते हैं, f(x) का मान भी 0 की ओर अग्रसर हो जाता है | इसे हम $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$ से दर्शाते हैं |

व्यापक रूप से, जब x→a, f(x)→ l, तब l को फलन f(x) की सीमा कहा जाता है और इसे $\lim_{x\to 0} f(x) = l$ से लिखा जाता है |

$\lim_{x\to \bar{a}} f(x), x = a$ पर f(x) का आपेक्षित मान है, जिसमें x के बाईं ओर निकट मानों के लिए f(x) को मान दिए हैं | इस मान को a पर f(x) की बाएँ पक्ष की सीमा कहते हैं |

$\lim\limits_{x\to a^+} f(x), x = a$ पर f(x) का आपेक्षित मान है, जिसमें x के a के दाई ओर के निकट मानों के लिए f(x) के मान दिए गए हैं | इस मान को a पर f(x) की दाएं पक्ष की सीमा कहते हैं |

यदि दाएं और बाएँ पक्ष की सीमाएँ संपाती हों तो हम इस उभयनिष्ठ मान को x = a पर f(x) की सीमा कहते हैं और इसे $\lim_{x\to a} f(x)$ से निरुपित करते हैं |

अर्थात्

$\lim_{x\to \bar{a}} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x) = f(a)$

- **सीमाओं का बीजगणित**

मान लीजिए कि f और g दो फलन ऐसे हैं कि $\lim_{x\to a} f(x)$ और $\lim_{x\to a} g(x)$ दोनों का अस्तित्व है | तब

1. दो फलनों के योग की सीमा फलनों की सीमाओं का योग होता है, अर्थात्
   $\lim_{x\to a}[f(x) + g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x)$
2. दो फलनों के अंतर की सीमा फलनों' की सीमाओं का अंतर होता है, अर्थात्
   $\lim_{x\to a}[f(x) - g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) - \lim_{x\to a} g(x)$
3. दो फलनों के गुणन की सीमा फलनों की सीमाओं का गुणन होता है, अर्थात्
   $\lim_{x\to a}[f(x). g(x)] = \lim_{x\to a} f(x). \lim_{x\to a} g(x)$
4. दो फलनों के गुणन की सीमा फलनों की सीमाओं का भागफल होता है, (जबकि हर शून्येतर होता है) अर्थात्
   $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}$

- किसी धन पूर्णांक n के लिए

  $\lim\limits_{x\to a} \frac{x^n - a^n}{x-a} = na^{n-1}$

- $\lim\limits_{x\to 0} \frac{sinx}{x} = 1$
- $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-cosx}{x} = 0$

- **अवकलज**

मान लीजिए f एक वास्तविक मानीय फलन है और इसकी परिभाषा के प्रान्त में एक बिंदु a है | a पर f का अवकलज

$\lim\limits_{x\to a} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$

से परिभाषित है , बशर्ते

कि इस सीमा का अस्तित्व हो | a पर f(x) का अवकलज f(a) से निरुपित होता है |

- **फलनों के अवकलज का बीजगणित**

मान लीजिए f और g दो ऐसे फलन हैं कि उनके उभयनिष्ठ प्रान्त में उनके अवकलन परिभाषित हैं, तब

(i) दो फलनों के योग का अवकलन उन फलनों के अवकलनों का योग है, अर्थात्

$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}}[\mathrm{f(x)}+\mathrm{g(x)}]=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}}f(x)+\frac{d}{d(x)}g(x)$

(ii) दो फलनों के अंतर का अवकलन उन फलनों के अवकलनों का अंतर है, अर्थात्

$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}}[\mathrm{f(x)}-\mathrm{g(x)}]=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}}f(x)-\frac{d}{dx}g(x)$

(iii) दो फलनों के गुणन का अवकलन निम्नलिखित गुणन नियम से दिया गया है अर्थात्

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}}[\mathrm{f(x)}.\mathrm{g(x)}]=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}}f(x)\ .g(x)+f(x).\ \frac{d}{dx}g(x)$$

(iv) दो फलनों के भागफल का अवकलन निम्नलिखित भागफल नियम से दिया गया है (जहाँ हर शून्येतर)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}}\left[\frac{\mathrm{f(x)}}{\mathrm{g(x)}}\right]=\frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}}\mathrm{f(x)}\ .\mathrm{g(x)}-\mathrm{f(x)}.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}}\mathrm{g(x)}}{(\mathrm{g(x)})^2}$$

- अवकलन में उपयोग होने वाले महत्वपूर्ण सूत्र

(i) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}}\mathrm{x^n}=\mathrm{nx^{n-1}}$

(ii) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}}(\mathrm{c})=0$

(iii) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}}\mathrm{sinx}=\mathrm{cosx}$

(iv) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}}\mathrm{cosx}=-\mathrm{sinx}$

(v) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}}\mathrm{tanx}=\mathrm{sec^2x}$

(vi) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}}\mathrm{cosecx}=-\mathrm{cosecx.cotx}$

(vii) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}}\mathrm{secx}=\mathrm{secx.tanx}$

(viii) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}}\mathrm{cotx}=-\mathrm{cosec^2x}$

Q.1 सही विकल्प चुने |

I. $\lim_{x\to a}\frac{x^n-a^n}{x-a}$ जहाँ $n\in N$ का मान होगा:

(अ) na^{n-1} (ब) $(n-1).a^n$

(स) $\frac{a^{n-1}}{n}$ (द) $\frac{a^n}{n-1}$

II. यदि $\lim_{x\to 0}\frac{\sin px}{\sin 3x}=4$ हो तो p का मान होगा:

(अ) 6 (ब) 9

(स) 12 (द) 14

III. $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x^2}{x}$ का मान होगा :

(अ) 1 (ब) 2

(स) 0 (द) -1

IV. $\frac{d}{dx}\sec x$ का मान होगा:

(अ) – $\sec x\tan x$ (ब) – $\cot x\ \mathrm{cosec}\ x$

(स) $\cot x\ \mathrm{cosec}\ x$ (द) $\sec x\tan x$

V. $\sin^2 x$ का अवकलज गुणांक होगा:

(अ) $\cos 2x$ (ब) $\sin 2x$

(स) $\tan 2x$ (द) $\cot 2x$

Q.2 सत्य / असत्य छांटिए।

I. $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{\sqrt{x}}$ का मान 0 होगा।

II. $2 \cos x$ का $x = \frac{\pi}{2}$ अवकलन गुणांक 2 होगा।

III. $\frac{d}{dx} \frac{\sec x}{\operatorname{cosec} x}$ का मान $\operatorname{cosec}^2 x$ होगा।

IV. यदि $f(x) = x^2 + 1$ हो तो $f'(2)$ का मान - 2 होगा।

Q.3 रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए ।

I. यदि $y = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$ है तो $x = 0$ पर $\frac{dy}{dx}$ = ... होगा।

II. $\lim_{\theta \to 0} \frac{\sin\left(\frac{\theta}{4}\right)}{\theta}$ का मान .... होगा।

III. $\lim_{\theta \to 0} \frac{\theta}{\tan \theta}$ का मान .... होगा।

IV. $\lim_{x \to 0} \frac{x}{\sqrt{1+x}-1}$ का मान .... होगा।

Q.4 सही जोड़ी मिलाइये।

	स्तंभ अ		स्तंभ ब
I.	$\lim_{x \to 1} \left[\frac{x^2+1}{x+100}\right]$ का मान	(a)	0
II.	$\lim_{x \to 0} x \sec x$	(b)	$\frac{2}{101}$
III.	$\lim_{r \to 1} \pi r^2$	(c)	$\sin 2x$
IV.	$\lim_{x \to \pi} \left[\frac{\sin(\pi-x)}{\pi(\pi-x)}\right]$	(d)	π
V.	$\frac{d}{dx} \sin^2 x$	(e)	$1/\pi$

Q.5 एक शब्द / वाक्य में उत्तर लिखिए।

I. $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x^0}{x}$ का मान लिखिए।

II. $\lim_{x \to \pi} \frac{\sin x}{x-\pi}$ का मान लिखिए।

III. $\lim_{x \to 0} \frac{\sin ax}{bx}$ का मान लिखिए।

IV. $x = 100$ पर $99x$ का अवकलन गुणांक लिखिए।

V. $x \sin x$ का अवकलज लिखिए।

Q.6 $\lim_{x \to 3} [x(x+1)]$ का मान ज्ञात करें।

Q.7 $\lim_{x \to -2} \frac{\frac{1}{x}+\frac{1}{2}}{x+2}$ को हल करें।

Q.8 $\lim_{x \to 0} \frac{\tan x}{x}$ का मान ज्ञात करें।

Q.9 $\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$ को हल करें।

Q.10 $\lim_{x \to 0} \frac{\cos x}{\pi - x}$ को हल करें।

Q.11 $\lim_{x \to 4} \frac{x^4 - 256}{x-4}$ का मान ज्ञात कीजिए।

Q.12 $\lim_{x \to 0} \left[\frac{1-\cos 2x}{x}\right]$ की गणना कीजिए।

Q.13 $x^{-4}\,(3 - 4x^{-5})$का अवकलन कीजिए।

Q.14 $cosec\ x$ क अवकलन गुणांक ज्ञात कीजिए।

Q.15 $(x-2)^2$ का अवकलन गुणांक ज्ञात कीजिए।

Q.16 $(x^2 + 1)^2$ का अवकलन ज्ञात करो।

Q.17 यदि $y = \frac{2-3\cos x}{\sin x}$ है तब $x = \frac{\pi}{4}$ पर $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात कीजिए।

Q.18 $(x + \cos x)\,(x - \tan x)$ का अवकलज कीजिए।

Q.19 $(2\tan x - 7\,sex + x^4)$ का अवकलन गुणांक ज्ञात कीजिए।

Q.20 यदि $y = \sqrt{\frac{1-\cos 2x}{1+\cos 2x}}$ जहां $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ तब $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात कीजिए।

Q.21 यदि $y = x^5 \cos x$ हो तो $\frac{dy}{dx}$ का मान ज्ञात कीजिए।

Q.22 $\sec\ x \tan x$ का अवकलन गुणांक ज्ञात कीजिए।

Q.23 $\lim_{x \to 2} \left[\frac{x^3 - 4x^2 + 4x}{x^2 - 4}\right]$ का मान ज्ञात कीजिए।

Q.24 $\lim_{x \to 1} \left[\frac{x^{15} - 1}{x^{10} - 1}\right]$ को हल कीजिए।

Q 25. $\lim_{x \to 0} \left[\frac{\sqrt{1+x} - 1}{x}\right]$ का मान ज्ञात कीजिए।

Q 26. $\lim_{x \to 0} \left[\frac{a + x x}{b x}\right]$ का मान ज्ञात कीजिए।

Q 27. किसी अचर a के लिए $\frac{x^n - a^n}{x-a}$ का अवकलज ज्ञात कीजिए।

Q.28 $\lim_{x \to 3} \frac{x^4 - 81}{2x^2 - 5x - 3}$ का मान ज्ञात कीजिए।

Q.29 $\lim_{z \to 1} \frac{z^{1/3} - 1}{z^{1/6} - 1}$ का मान ज्ञात कीजिए।

Q.30 $\lim_{x \to 1} f(x)$ का मान ज्ञात कीजिए, जहां $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & x \leq 1 \\ -x^2 - 1 & x > 1 \end{cases}$

Q.31 $y = \frac{x + \cos x}{\tan x}$ है तो $\frac{dy}{dx}$ मान ज्ञात कीजिए।

Q.32 $\frac{4x + 5\sin x}{3x + 7\cos x}$ का अवकलन गुणांक ज्ञात कीजिए।

Q.33 $\frac{\sec x - 1}{\sec x + 1}$ का अवकलन गुणांक ज्ञात कीजिए।

Q.34 $\frac{x \tan x}{\sec x + \tan x}$ का अवकलन गुणांक ज्ञात कीजिए।

Q.35 $\tan x$ का प्रथम सिद्धांत से अवकलन गुणांक ज्ञात कीजिए।

Q.36 $\sin x$ को प्रथम सिद्धांत से अवकलित कीजिए।

Q.37 $\frac{x^5 - \cos x}{\sin x}$ का अवकलन गुणांक ज्ञात कीजिए।

Q.38 $\frac{\sqrt{a} + \sqrt{x}}{\sqrt{a} - \sqrt{x}}$ को x के सापेक्ष अवकलन कीजिए।

उत्तरमाला (वस्तुनिष्ठ प्रश्न)

A.1 I (अ), II (स), III (स), IV (द), V (ब)

A.2 I. सत्य , II .असत्य, III .असत्य, IV. असत्य

A.3 (I) 3

(II) $^1/_4$

(III) 1

(IV) 2

A.4 (I) ↔ (b), (II) ↔ (a), (III) ↔ (d), (IV) ↔ (e), (V) ↔ (c)

A.5

(I) $\pi/180$

(II) -1,

(III) a/b ,

(IV) 99

(V) $x \cos x + \sin x$

****

अध्याय 15: सांख्यिकी

स्मरणीय तथ्य

- वर्गीकृत आँकड़ों के लिए माध्य :

$$M.D.(\bar{x}) = \frac{\sum fx}{\sum f}$$

- अवर्गीकृत आँकड़ों के लिए माध्य के सापेक्ष माध्य विचलन :

$$M.D.(\bar{x}) = \frac{\sum |x - \bar{x}|}{n}$$

जहाँ $\bar{x} =$ माध्य

- वर्गीकृत आँकड़ों के लिए माध्य के सापेक्ष माध्य विचलन :

$$M.D.(\bar{x}) = \frac{\sum f|x - \bar{x}|}{\sum f}$$

जहाँ $\bar{x} = \frac{\sum fx}{\sum f}$

- अवर्गीकृत आँकड़ों के लिए माध्यिका के सापेक्ष माध्य विचलन :

$$M.D.(M) = \frac{\sum |x - M|}{n}$$

जहाँ $M =$ माध्यिका

- वर्गीकृत आँकड़ों के लिए माध्यिका के सापेक्ष माध्य विचलन :

$$M.D.(M) = \frac{\sum f|x - M|}{\sum f}$$

जहाँ $M =$ माध्यिका

- वर्गीकृत आँकड़ों के लिए प्रसरण :

प्रसरण $(\text{var}(x)) = \frac{\sum f(x - \bar{x})^2}{\sum f}$

- मानक विचलन $(S.D) = \sqrt{\text{var}(x)}$

Q1. एक शब्द वाक्य में उत्तर दीजिए :

1. आँकड़ों के परिसर को परिभाषित कीजिए |

2. यदि एक बल्लेबाज द्वारा खेल में अधिकतम 60 रन और न्यूनतम 46 रन बनाए जाते हैं तो रनों का परिसर ज्ञात कीजिए |
3. निम्नलिखित आँकड़ों से माध्य का मान लिखिए:
   6, 7, 10, 12, 13, 4, 8, 12
4. निम्नलिखित आँकड़ों से माध्यिका का मान लिखिए:
   3, 9, 5, 3, 12, 10,18, 4,7, 19,21
5. निम्नलिखित आँकड़ों से माध्यिका का मान लिखिए:
   4, 10, 6, 4, 13, 11, 19, 5, 8, 20

Q2. निम्नलिखित अवर्गीकृत आँकड़ों के लिए माध्य के सापेक्ष माध्य विचलन ज्ञात कीजिए:

6, 7, 10, 12, 13, 4, 8, 12

Q3. निम्नलिखित अवर्गीकृत आँकड़ों के लिए माध्य के सापेक्ष माध्य विचलन ज्ञात कीजिए:

4, 7, 8, 9, 10, 12, 13, 17

Q4. निम्नलिखित आँकड़ों से माध्यिका के सापेक्ष माध्य विचलन ज्ञात कीजिए:

3, 9, 5, 3, 12, 10, 18, 4, 7, 19, 21

Q5. निम्नलिखित आँकड़ों के लिए माध्य के सापेक्ष माध्य विचलन ज्ञात कीजिए:

x	2	5	6	8	10	12
f	2	8	10	7	8	5

Q6. निम्नलिखित आँकड़ों के लिए माध्य के सापेक्ष माध्य विचलन ज्ञात कीजिए:

x	10	30	50	70	90
f	4	24	28	16	8

Q7. निम्नलिखित आँकड़ों के लिए माध्यिका के सापेक्ष माध्य विचलन ज्ञात कीजिए:

x	3	6	9	12	13	15	21	22
f	2	4	5	2	4	5	4	3

Q8. निम्नलिखित आँकड़ों के लिए प्रसरण व मानक विचलन ज्ञात कीजिए :

6 , 8 , 10 , 12, 14 , 16, 18 , 20 , 22, 24

Q9. निम्नलिखित आँकड़ों के लिए माध्य के सापेक्ष माध्य विचलन ज्ञात कीजिए:

x	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80
f	2	3	8	14	8	3	2

Q10. निम्नलिखित आँकड़ों के लिए माध्यिका के सापेक्ष माध्य विचलन ज्ञात कीजिए:

वर्ग	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60
बारंबारता	6	7	15	16	4	2

Q11. निम्नलिखित आँकड़ों के लिए प्रसरण व मानक विचलन ज्ञात कीजिए :

x	4	8	11	17	20	24	32
f	3	5	9	5	4	3	1

Q12. निम्नलिखित बंटन के लिए माध्य, प्रसरण और मानक विचलन ज्ञात कीजिए:

x	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80	80-90	90-100
f	3	7	12	15	8	3	2

....

उत्तरमाला
(वस्तुनिष्ठ प्रश्न)

A .1

1. किसी श्रंखला के अधिकतम एवं न्यूनतम मानों के अंतर को परिसर कहते हैं |
2. परिसर = 60 – 46 = 14
3. 9
4. 9
5. 9

****

अध्याय 16: प्रायिकता

महत्त्वपूर्ण तथ्य

- दो समुच्चय A और B असंयुक्त समुच्चय हैं, यदि $A \cap B = \phi$.
- दो घटनाएँ A और B परस्पर अपवर्जी घटनाएँ कही जाती हैं, यदि इनमें से किसी एक का घटित होना दूसरी के घटित होने को अपवर्जित करता है अर्थात वे एक साथ घटित नहीं हो सकती हैं ।
- दो घटनाएँ A और B परस्पर अपवर्जी घटनाएँ कही जाती हैं, यदि $A \cap B = \phi$.
- यदि दो घटनाएँ A और B परस्पर अपवर्जी घटनाएँ हैं, तो $P(A \cap B) = 0.$
- एक प्रतिदर्श समष्टि की सरल घटनाएँ सदैव परस्पर अपवर्जी होती हैं ।
- यदि किसी प्रतिदर्श समष्टि S , की दो घटनाएँ A और B हैं तो $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$
- यदि किसी प्रतिदर्श समष्टि S , की दो घटनाएँ A और B हैं तो $P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B).$
- यदि किसी प्रतिदर्श समष्टि S , की दो घटनाएँ A और B परस्पर अपवर्जी हैं तो $P(A \cup B) = P(A) + P(B).$
- किसी घटना E के लिए $P(E) \geq 0.$
- यदि किसी यादृच्छिक परीक्षण का प्रतिदर्श समष्टि S है तो $P(S) = 1.$

Q1. सही विकल्प चुनिये:

1. यदि A और B दो असंयुक्त समुच्चय हों तो $A \cap B$ का मान होगा:
   (a) $\cup$ (b) A (c) B (d) ϕ
2. यदि $P(A) = \frac{1}{3}, P(B) = \frac{1}{2}$ तथा A और B परस्पर अपवर्जी घटनाएँ हैं, तब $P(A \cup B)$ का मान होगा:
   (a) $\frac{5}{6}$ (b) $\frac{1}{6}$ (c) $\frac{1}{3}$ (d) $\frac{2}{3}$

Q2. रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए:

1. $P(A) + P(A') = ...$
2. यदि किसी यादृच्छिक परीक्षण का प्रतिदर्श समष्टि S है तो $P(S) = ...$

Q3. सत्य / असत्य लिखिए :

1. यदि किसी घटना A की प्रायिकता $\frac{9}{11}$ है तो घटना $A-$ नहीं की प्रायिकता $\frac{2}{11}$ होगी |
2. प्रतिदर्श समष्टि S का कोई उपसमुच्चय एक घटना कही जाती है |
3. एक प्रतिदर्श समष्टि की सरल घटनाएँ सदैव परस्पर अपवर्जी होती हैं |

Q4. एक शब्द या वाक्य में उत्तर लिखिए:

1. दो सिक्कों को एक बार उछाला गया है | प्रतिदर्श समष्टि लिखिए |
2. एक सिक्के को दो बार उछाला गया है | प्रतिदर्श समष्टि लिखिए |
3. तीन सिक्कों को एक बार उछाला गया है | प्रतिदर्श समष्टि लिखिए |
4. एक सिक्के को तीन बार उछाला गया है | प्रतिदर्श समष्टि लिखिए |
5. एक सिक्का उछाला गया है और केवल उस दशा में, जब सिक्के पर चित्त प्रकट होता है एक पासा फेंका जाता है | प्रतिदर्श समष्टि लिखिए |

Q5. दो सिक्कों (एक ₹1 का तथा दूसरा ₹2 का) को एक बार उछाला गया है | प्रतिदर्श समष्टि ज्ञात कीजिए |

Q6. पासों के जोड़े (जिसमें एक लाल रंग का और दूसरा नीले रंग का है) को एक बार फेंकने के परीक्षण का प्रतिदर्श समष्टि ज्ञात कीजिए |

Q7. एक सिक्का उछाला गया है और केवल उस दशा में, जब सिक्के पर चित प्रकट होता है, एक पांसा फेंका जाता है| प्रतिदर्श समष्टि ज्ञात कीजिए |

Q8. एक पांसा फेंका जाता है | मान लीजिए घटना 'E' पासे पर संख्या 4 दर्शाता है' और घटना F 'पासे पर सम संख्या दर्शाता' है| क्या E और F परस्पर अपवर्जी हैं?

Q9. एक सिक्का दो बार उछाला जाता है | कम से कम एक पट प्राप्त होने की क्या प्रायिकता है?

Q10. शब्द 'ASSASSINATION' से एक अक्षर यादृच्छिया चुना जाता है | प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि चुना गया अक्षर (i) एक स्वर है (ii) एक व्यंजन है |

Q11. एक अनभिनत सिक्का जिसके एक तल पर 1 और दूसरे तल पर 6 अंकित है तथा एक अनभिनत पासा दोनों को उछाला जाता है | प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि प्रकट संख्याओं का योग (i) 3 है | (ii) 12 है |

Q12. यदि E और F घटनाएँ इस प्रकार हैं कि $P(E)=\frac{1}{4}$, $P(F)=\frac{1}{2}$ और $P(E \text{ और } F)=\frac{1}{8}$, तो ज्ञात कीजिए (i) $P(E \text{ या } F)$ (ii) $P(E-\text{नहीं और } F-\text{नहीं})$ |

Q13. घटनाएँ A और B इस प्रकार हैं कि $P(A)=0.42$, $P(B)=0.48$ और $P(A \text{ और } B)=0.16$ तो ज्ञात कीजिए (i) $P(A-\text{नहीं})$ (ii) $P(B-\text{नहीं})$ (iii) $P(A \text{ या } B)$ |

Q14. A और B दो घटनाएँ इस प्रकार हैं कि $P(A)=0.54$, $P(B)=0.69$ और $P(A\cap B)=0.35$ ज्ञात कीजिए (i) $P(A\cup B)$ (ii) $P(A'\cap B')$ (iii) $P(A\cap B')$ (iv) $P(B\cap A')$

Q15. $P(A)=\frac{3}{5}$ और $P(B)=\frac{1}{5}$, दिया गया है | यदि A और B परस्पर अपवर्जी घटनाएँ हैं, तो $P(A \text{ या } B)$ ज्ञात कीजिए |

Q16. एक पासा फेंकने के परीक्षण पर विचार कीजिये | घटना ' एक अभाज्य संख्या प्राप्त होना को A से और घटना 'एक विषम संख्या प्राप्त होना ' को B से निरूपित किया गया है | निम्नलिखित घटनाओं (i) A या B (ii) A और B (iii) A किंतु B नहीं (iv) 'A - नहीं '

को निरूपित करने वाले समुच्चय लिखिए |

Q17. एक पासा फेंका जाता है | निम्नलिखित घटनाओं का वर्णन कीजिए :

(i) A: संख्या 7 से कम है | (ii) B: संख्या 7 से बड़ी है | (iii) C: संख्या 3 का गुणज है |

(iv) D: संख्या 4 से कम है | (v) E: 4 से बड़ी सम संख्या है | (vi) F: संख्या 3 से कम नहीं है |

Q18. एक पासा फेंका जाता है | निम्नलिखित घटनाओं की प्रायिकता ज्ञात कीजिए:

(i) एक अभाज्य संख्या प्रकट होना (ii) 3 या 3 से बड़ी संख्या प्रकट होना (iii) 1 या 1 से छोटी संख्या प्रकट होना (iv) छः से बड़ी संख्या प्रकट होना (v) छः से छोटी संख्या प्रकट होना |

Q19. तीन सिक्के एक बार उछाले जाते हैं | निम्नलिखित की प्रायिकता ज्ञात कीजिए:

(i) तीन चित्त प्रकट होना (ii) 2 चित्त प्रकट होना (iii) न्यूनतम 2 चित्त प्रकट होना (iv) अधिकतम 2 चित्त प्रकट होना (v) एक भी चित्त प्रकट न होना (vi) 3 पट प्रकट होना (vii) तथ्यत: 2 पट प्रकट होना (viii) कोई भी पट्ट न प्रकट होना (ix) अधिकतम 2 पट प्रकट होना |

Q20. ताश के 52 पत्तों की एक भली –भाँति फेंटी गई गड्डी में से एक पत्ता निकाला गया है | निकाले गए पत्ते की प्रायिकता ज्ञात कीजिए, यदि

(i) पत्ता ईंट का है | (ii) पत्ता इक्का नहीं है | (iii) पत्ता काले रंग का है (अर्थात चिड़ी या हुकुम का है) |

(iv) पत्ता ईंट का नहीं है | (v) पत्ता काले रंग का नहीं है |

Q21. एक थैले में 9 डिस्क हैं जिनमें से 4 लाल रंग की, 3 नीले रंग की और 2 पीले रंग की हैं| डिस्क आकार एवं माप में समरूप हैं | थैले में से एक डिस्क यादृच्छिया निकाली जाती है| प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि निकाली गई डिस्क

(i) लाल रंग की है (ii) पीले रंग की है (iii) नीले रंग की है (iv) नीले रंग की नहीं है,

(v) लाल रंग की है या नीले रंग की है |

Q22. दो पुरुषों व दो स्त्रियों के समूह में से दो व्यक्तियों की एक समिति का गठन करना है | प्रायिकता क्या है कि गठित समिति में

(a) कोई पुरुष न हो? (b) एक पुरुष हो ? (c) दोनों पुरुष हों ?

Q23. एक डिब्बे में 10 लाल, 20 नीली व 30 हरी गोलियां रखी हैं | डिब्बे से 5 गोलियां यादृच्छिया निकाली जाती हैं | प्रायिकता क्या है कि (i) सभी गोलियां नीली हैं ? (ii) कम से कम एक गोली हरी है?

Q24. ताश के 52 पत्तों की एक अच्छी तरह फेंटी गई गड्डी से 4 पत्ते निकाले जाते हैं | इस बात की क्या प्रायिकता है कि निकाले गए पत्तों में 3 ईंट और एक हुकुम का पत्ता है?

Q25. दो विद्यार्थियों अनिल और आशिमा एक परीक्षा में प्रविष्ट हुए | अनिल के परीक्षा में उत्तीर्ण होने की प्रायिकता 0.05 है और आशिमा के परीक्षा में उत्तीर्ण होने की प्रायिकता 0.10 है | दोनों के परीक्षा में उत्तीर्ण होने की प्रायिकता 0.02 है | प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि

(a) अनिल और आशिमा दोनों परीक्षा में उत्तीर्ण नहीं हो पाएंगे |

(b) दोनों में से कम से कम एक परीक्षा में उत्तीर्ण नहीं होगा |

(c) दोनों में से केवल एक परीक्षा में उत्तीर्ण होगा|

Q26. एक पाठशाला की कक्षा XI के 40% विद्यार्थी गणित या जीव विज्ञान पढ़ते हैं और 30% विद्यार्थी जीवविज्ञान पढ़ते हैं | कक्षा के 10% विद्यार्थी गणित और जीव विज्ञान दोनों पढ़ते हैं | यदि कक्षा का एक विद्यार्थी यादृच्छिया चुना जाता है , तो प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि वह गणित या जीवविज्ञान पढ़ता

होगा |

Q27. एक प्रवेश परीक्षा को दो परीक्षणों के आधार पर श्रेणीबद्ध किया जाता है | किसी यादृच्छिया चुने गए विद्यार्थी की पहले परीक्षण में उत्तीर्ण होने की प्रायिकता 0.7 है | दोनों में से कम से कम एक परीक्षण उत्तीर्ण करने की प्रायिकता 0.95 है | दोनों परीक्षणों को उत्तीर्ण करने की प्रायिकता क्या है ?

Q28. एक विद्यार्थी के अंतिम परीक्षा के अँग्रेजी और हिन्दी दोनों विषयों को उत्तीर्ण करने की प्रायिकता 0.5 है और दोनों में से कोई भी विषय उत्तीर्ण न करने की प्रायिकता 0.1 है | यदि अँग्रेजी की परीक्षा उत्तीर्ण करने की प्रायिकता 0.75 हो तो हिन्दी की परीक्षा उत्तीर्ण करने की प्रायिकता क्या है ?

Q29. एक कक्षा के 60 विद्यार्थियों में से 30 ने एन. सी. सी (NCC), 32 ने एन.एस.एस (NSS) और 24 ने दोनों को चुना है | यदि इनमें से एक विद्यार्थी यादृच्छिया चुना गया है तो प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि

(i) विद्यार्थी ने एन.सी.सी या एन.एस.एस को चुना है |

(ii) विद्यार्थी ने न तो एन.सी.सी और न ही एन.एस.एस को चुना है

(iii) विद्यार्थी ने एन.एस.एस को चुना है किन्तु एन.सी.सी को नहीं चुना है |

....

उत्तरमाला
(वस्तुनिष्ठ प्रश्न)

A1. 1. (a) ϕ 2. (a) $\frac{5}{6}$

A2. 1. 1 2. 1

A3. 1. सत्य 2. सत्य 3. सत्य

A4.

1. $S=\{HH\ ,HT\ ,TH\ ,TT\}$
2. $S=\{HH\ ,HT\ ,TH\ ,TT\}$
3. $S=\{HHH\ ,HHT\ ,HTH\ ,HTT\ ,THH\ ,THT\ ,TTH\ ,TTT\}$
4. $S=\{HHH\ ,HHT\ ,HTH\ ,HTT\ ,THH\ ,THT\ ,TTH\ ,TTT\}$
5. $S=\{H1,\ H2, H3, H4, H5, H6, T\}$

****